PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

MONOGRAFIA DE FINAL DE CURSO

MIX DE NORMAIS, UMA ABORDAGEM ALTERNATIVA

Ian Marcus Caó Dias

Nº de matrícula : 9314963-2

Orientador : Márcio G. P. Garcia

Novembro de 1997

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

MONOGRAFIA DE FINAL DE CURSO

MIX DE NORMAIS, UMA ABORDAGEM ALTERNATIVA

Ian Marcus Caó Dias

Nº de matrícula : 9314963-2

Orientador : Márcio G. P. Garcia

Novembro de 1997

“As opiniões expressas neste trabalho são de responsabilidade única e exclusiva do autor”

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a minha família e aos meus amigos, que me apoiaram durante todo o período em que cursei economia na PUC.

Gostaria de agredecer também ao meu orientador neste trabalho, o Prof. Márcio Garcia, pela ajuda e orientação a mim dispensada.

Não poderia deixar de fazer um agradecimento especial à Marcos Antônio Coutinho da Silveira, sem o qual seria impossível a conclusão deste trabalho.

Índice

Índice de Gráficos

I. INTRODUÇÃO

Há muito vêm sendo estudados os ativos principais das bolsas de valores, estudos estes que, de alguma forma, associam uma possível distribuição de probabilidade teórica à variável dos retornos diários destes ativos(os modelos de precificação em geral são um bom exemplo). Geralmente, como no modelo RiskMetrics, toma-se a distribuição normal como a que melhor descreve o comportamento dos retornos, o que pode não ser a melhor alternativa, já que, quando confronta-se a mesma com a distribuição empírica, observa-se que esta apresenta curtose positiva (apresenta "fat tails"). Isto significa que eventos extremos ocorrem com muito mais frequência do que a distribuição normal indica. Tal problema é particularmente interessante quando leva-se em consideração que a base de quase todos os instrumentos de análise de risco e de precificação de opções, é justamente a distribuição de probabilidade que vai ser usada nos modelos.

Um dos modelos de mensuração de risco comumente utilizado é o modelo de simulação de Monte Carlo. Este consiste na estimação do valor de um percentil qualquer, para um portfólio fixo, partindo de diversas extrações de uma distribuição de probabilidade teórica, às quais é submetido um processo matemático chamado fatoração de Choleski, a fim de levar em consideração as correlações entre os ativos que formam o portfólio. Quando o portfólio apresenta ativos que não dependem linearmente das variáveis do mercado o processo pode ser feito de várias maneiras maneiras, sendo que duas destas são mais comumente utilizadas : estimar o valor de seu portfólio usando o que é chamado "financeiro alavancado", ou seja, usar os dois primeiros termos da expansão de Taylor para achar uma relação direta entre a variação do valor do seu portfólio e as variações geradas a partir do processo de Monte Carlo , ou então reprecificar os ativos não linearmente dependentes para cada extração e calcular a variação no valor de seu portfólio, sendo esta segunda abordagem chamada de simulação total.

Muitos trabalhos já foram feitos usando-se tal metodologia, inclusive o RiskMetrics, o modelo de avaliação de risco mais difundido na atualidade, tomando-se a distribuição normal como sendo a distribuição teórica adequada, o que, como já foi dito acima, não parece ser a melhor alternativa. É por isto que, com este trabalho, procurarei apresentar uma alternativa à esta, tentando obter resultados mais precisos. Tentando levar em consideração o problema da curtose positiva, usarei como distribuição teórica, não a normal , mas a distribuição mix de normais.

O trabalho será feito da seguinte forma : primeiro será feita uma análise das séries de retorno, visando confrontar os percentis empíricos com os teóricos de uma distribuição normal, de forma a evidenciar a existência de curtose positiva. Depois, será usada a base de dados para estimar os parâmetros da distribuição mix de normais, que será usada como distribuição teórica no nosso modelo de mensuração dos percentis. Isto consiste em determinar certa variáveis da distribuição mix de normais que a tornam uma melhor aproximação da realidade que a distribuição normal simples. Com os parâmetros determinados, será construido o modelo e calculados os percentis. Como o enfoque do trabalho é a análise de risco, o interesse principal serão os percentis 0.5% e

2.5%, ou seja, respectivamente 99% e 95% dos intervalos do tipo dos que foram calculados conterão a variação observada. Com tais resultados calculados será feito um teste de consistência, comparando os percentis indicados pelo modelo , com as variações efetivas no valor do portfólio para diversos dias.

II. AVALIAÇÃO DOS DADOS EMPÍRICOS

As séries de retorno das variáveis de mercado apresentam curtose positiva. Isto significa que, movimentos extremos nestas variáveis ocorrem mais frequentemante do que seria esperado, caso estas seguissem a distribuição normal. Quando observamos o que acontece quando passamos de uma distribuição normal para uma distribuição com curtose positiva, notamos que há aglutinação de massa de probabilidade no centro e nas caudas da distribuição, e, ao mesmo tempo, retirada de massa das regiões intermediárias da distribuição. Para analisar variáveis de mercado quanto a existência, ou não, de curtose positiva, devemos analisar os retornos normalizados destas variáveis. O retorno normalizado nada mais é que o quociente do retorno para um dia t qualquer e o desvio padrão neste mesmo dia t (que leva em consideração todos os dados em uma janela qualquer até o dia t -1). O desvio padrão pode ser calculado de duas maneiras:

Método de variância simples, sendo esse o método mais tradicional de se calcular a volatilidade usando dados históricos baseando-se simplesmente em achar o desvio-padrão da série, dado por:

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}\left(x_{t-i} - \mu\right)^2} \qquad ,$$

onde a média μ é dada por: $\mu = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} x_{t-i}$, x_t é a taxa de variação do instrumento na data **t** e T define o que é chamado de "janela", ou seja, o número de observações utilizadas no cômputo da variância.

No caso em que a média é zero, a fórmula do desvio-padrão torna-se:

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} x_{t-i}^2}$$

Método do decaimento exponencial, que, como o próprio nome sugere, usa uma média móvel exponencial para calcular a volatilidade, dando peso maior aos dados mais recentes. A fórmula do desvio-padrão torna-se:

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda^{i-1}\left(x_{t-i} - \eta\right)^2}{\sum_{i=1}^{k} \lambda^{i-1}}}$$

onde a média η será dada por: $\eta_t = \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda^{i-1} x_{t-i}}{\sum_{i=1}^{k} \lambda^{i-1}}$

e λ é o fator de decaimento escolhido, devendo, obviamente, estar entre 0 e 1.

No caso de optarmos por trabalhar com média zero, o desvio-padrão será dado simplesmente por:

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda^{i-1} x_{t-i}^2}{\sum_{i=1}^{k} \lambda^{i-1}}}$$

O problema básico deste método está na escolha de λ. Esta deverá recair sobre o fator de decaimento que minimizar a soma dos erros ao quadrado (SEQ), onde o erro é definido como a diferença entre o intervalo estimado e a taxa de variação efetiva. A fórmula do SEQ será:

$$SEQ = \sum_{t=0}^{k} \left(volatilidade_t - |x_t| \right)^2$$

onde k é o total de observações da amostra e $\mathbf{x_t}$ é a taxa de variação diária. Por comodidade usaremos 95 % como fator de decaimento.

Com os desvios calculados, construimos uma série de retornos normalizados com os quais iremos trabalhar. A existência da curtose positiva será determinada pela comparação entre esta série, e as probabilidades que a normal indica para a ocorrência de determinado tipo de evento. Por exemplo : a distribuição normal indica que um retorno de um ativo três vezes maior que o seu desvio padrão, ocorrerá com probabilidade de 0.27 %, ou seja, que um retorno normalizado maior ou igual a 3, ocorrerá com probabilidade 0.27 %. Como teremos uma série de retornos normalizados, poderemos analizar com que frequência determinado tipo de retorno normalizado ocorrerá e, comparando com as frequências indicadas pela distibuição normal, determinar a existência de curtose positiva. Isto ocorrerá caso tenhamos mais retornos normalizados maiores do que 3 ou 4 e, menos retornos normalizados maiores do que 1, do que é predito na distribuição normal. Isto evidenciaria maior concentração nas caudas e no centro da distribuição do que na distrinbuição normal. Para efeito de mensuração de risco esta diferença pode ser muito significativa, já que, uma maior possibilidade de ocorrência de retornos normalizados maiores do que 3 ou 4, ou seja, uma maior possibilidade de ocorrência de eventos extremos, irá aumentar o risco em relação aquele calculado usando a distribuição normal. A tabela 1 apresenta as frequências, em termos percentuais (para 259 observações), de ocorrência de retornos normalizados (usando o método de variância simples, com janela de trinta dias) maiores do que 1,2,3 e 4, para os nove ativos com que trabalharemos e para a distribuição normal, e a tabela 2 apresenta os mesmos dados para os retornos normalizados calculados pelo método do decaimento exponencial (com fator de decaimento .95 e janela de 160 dias).

Tabela 1

	Índice	ELE3	ELE6	PET4	TEL3	TEL4	TEL5	TLS4	VAL4	Norm
>1	29.92	30.68	30.06	29.17	31.82	30.3	25.38	32.2	27.65	31.73
>2	10.23	6.82	7.58	6.82	6.44	7.2	8.33	6.82	7.95	4.55
>3	1.89	1.89	1.14	1.89	2.27	2.27	3.79	2.27	2.27	0.27
>4	0.38	0.38	0.76	0.00	0.38	0.38	1.14	0.76	1.14	0.01

Tabela 2

	Índice	ELE3	ELE6	PET4	TEL3	TEL4	TEL5	TLS4	VAL4	Normal
>1	29.17	29.17	29.01	30.68	30.68	29.92	25.38	31.06	25.76	31.73
>2	7.95	6.44	6.44	6.82	5.68	7.2	8.33	6.44	7.20	4.55
>3	1.52	1.52	1.14	1.52	1.89	1.89	3.03	1.89	1.89	0.27
>4	0.38	0.38	0.38	0.00	0.38	0.00	1.14	1.14	0.76	0.01

Analisando os dados das tabelas percebemos, claramente, que os eventos extremos, ou seja, maiores que três ou quatro desvios padrões, ocorrem mais frequentemente do que seria de se esperar caso os retornos dos ativos tivessem uma distribuição normal. Percebemos também, que os retornos normalizados maiores que um, ocorrem menos do que é indicado pela normal, caracterizando concentração de massa de probabilidade no meio da distribuição. Caracterizada a curtose positiva na distribuição dos dados empíricos, devemos desenvolver um modelo capaz de captar tal propriedade. O modelo que será proposto neste trabalho tem a capacidade de refletir a curtose positiva, tentando melhor estimar o risco de um portfólio qualquer. Ao analisar os dados, notamos também a característica de assimetria na distribuição empírica dos retornos dos ativos. Isto pode ser observado nos histogramas destas distribuições que estão no anexo de gráficos 1. A tabela a seguir mostra dados referentes ao número de observações, em uma dada amostra, que são maiores do que um desvio padrão e menores do que menos um desvio padrão, que reforçam tal característica :

Ativo	IND	ELE3	ELE6	PET4	TEL3	TEL4	TEL5	TLS4	VAL4
>1	48	53	50	54	56	49	45	56	43
<-1	36	32	35	35	36	38	29	34	31

Se tivéssemos uma distribuição simétrica, as quantidades de observações maiores que um desvio padrão e a quantidade de observações menores que menos um desvio padrão seriam iguais ou muito parecidas, o que não ocorre. Na realidade, temos uma tendência de assimetria à direita, ou seja, existe maior concentração de massa de probabilidade no lado direito da distribuição dos retornos. Isto reflete uma tendência de alta no mercado de ações no período em que analisamos os dados.

Um modelo alternativo ao que será proposto seria capaz de levar em conta tal característica em suas estimativas. Tal modelo seria basicamente o mesmo que apresentaremos, só que as médias das duas normais que compõe a mix de normais seriam diferentes. Devido a complexidade quanto as questões práticas que envolvem a implementação de tal modelo vamos deixá-lo de lado e resolveremos o modelo que usa as médias das normais iguais a zero.

III. DESCRIÇÃO DO MODELO

O modelo que vamos propor é uma alternativa ao modelo de simulação de Monte Carlo convencional e por isso faz-se nescessário uma detalhada explicação do mesmo.

III.1. Simulação via Monte Carlo Estruturado

O processo de simulação de Monte Carlo baseia-se na utilização da matriz de variância e covariância dos ativos, calculada a partir dos dados históricos, e uma série aleatória de possíveis retornos para cada um dos ativos, que obedeça uma determinada função de distribuição. Na prática, podemos descrevê-lo em três passos básicos[1].

- Decomposição da matriz de covariância dos ativos, M_{cov}, utilizando-se um princípio conhecido como fatorização de Choleski, que será detalhado mais adiante. Isso resultará em uma matriz A, de forma que M_{cov} seja igual ao produto de A pela sua transposta.

$$M_{cov} = A * A'$$

---

[1] J.P.Morgan (Mai. 1995), 30-31

- Geração de X, um conjunto de variáveis aleatórias normais multivariadas MVN (0,1), o que pode ser feito com a utlização de softwares, como o Excel, que possuem geradores de números aleatórios.

- Geração de retornos normais multivariados Y, que surgem do produto de X pela transposta da matriz A, onde Y é MVN ($0,M_{cov}$). Logo,

$$Y = X * A'$$

Simplificando, primeiramente geramos um grande número de possíveis combinações de preços e taxas para os ativos, os cenários, que sejam consistentes com as estatísticas de variação e correlação esperadas, e depois reavaliamos a posição em cada um desses cenários, obtendo, assim, uma distribuição de variações no valor dessa posição.

O grande entrave no proceeso acima descrito é a obtenção da matriz A a partir de M_{cov}. Isto, porque só é possivel encontrar uma solução para A caso a matiz de covariância seja simétrica e positiva-definida. Particularmente quando M_{cov} é muito grande e as volatilidades e correlações foram estimadas com janelas relativamente pequenas o último pré-requisito não é atendido, tornando-se inviável o cálculo de A. Nos demais casos, como já foi dito, o algorítimo utilizado para obter A é a decomposição de Choleski, que será agora descrito.

III.1.1.- Fatorização de Choleski

Supondo que a dimensão da matriz de covariância seja 3 x 3, considere as seguintes definições[2] :

$$M_{cov} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \qquad A' = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ 0 & a_{22} & a_{32} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

onde M_{cov} é a matriz de covariância, A é a matriz a ser computada e A', sua tranposta.

Então temos que,

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ 0 & a_{22} & a_{32} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{11}a_{21} & a_{11}a_{31} \\ a_{11}a_{21} & a_{21}^2 + a_{22}^2 & a_{21}a_{31} + a_{32}a_{22} \\ a_{11}a_{31} & a_{21}a_{31} + a_{32}a_{22} & a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 \end{bmatrix}$$

Agora, nós podemos usar os elementos de M_{cov} para resolver os elementos de A. Isto é feito de maneira recurssiva :

$$s_{11} = a_{11}^2 \Rightarrow a_{11} = \sqrt{s_{11}}$$

---

[2] J.P.Morgan (Mai. 1995), 100-101

$$s_{21} = a_{11}a_{21} \Rightarrow a_{21} = \frac{s_{21}}{a_{11}}$$

$$s_{22} = a_{21}^2 + a_{22}^2 \Rightarrow a_{22} = \sqrt{s_{22} - a_{21}^2}$$

$$s_{31} = a_{11}a_{31} \Rightarrow a_{31} = \frac{s_{31}}{a_{11}}$$

$$s_{32} = a_{21}a_{31} + a_{32}a_{22} \Rightarrow a_{32} = \frac{s_{32} - a_{21}a_{31}}{a_{22}}$$

$$s_{33} = a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 \Rightarrow a_{33} = \sqrt{s_{33} - a_{31}^2 - a_{32}^2}$$

Generalizando os resultados acima, podemos dizer que :

$$a_{ii} = \sqrt{s_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}^2}$$

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{jj}}\sqrt{s_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}\,a_{jk}} \qquad \text{, onde } j = i+1,\ i+2,\ \ldots$$

Além da metodologia acima descrita, existem outros processos algébricos, como por exemplo a utilização do processo de fatorização triangular, que obviamente nos levam aos mesmos resultados, mas cuja implementação prática é um pouco mais trabalhosa.

III.2. O MODELO

III.2.1. - Visão Geral

O modelo é um Monte Carlo com base em uma distribuição mix de normais, afim de captar a curtose positiva na distribuição dos retornos dos ativos. O primeiro passo será estimar os parâmetros da distribuição mix de normais, o que será feito de forma a promover o melhor ajustamento desta, em relação a distribuição empírica. Após estimados tais parâmetros, poderemos obter uma série de extrações que vamos usar na simulação de Monte Carlo. Isto será feito a partir de uma manipulação das extrações normais, obtidas por um gerador de números, transformando-as em extrações mix de normal, sendo estas últimas usadas na simulação de Monte Carlo. O processo se dará da seguinte forma : a partir das extrações normais geradas pelo RNG("Random Number Generator"), obteremos a acumulada da normal padrão para cada uma das extrações. Nestas acumuladas usaremos a inversa da função acumulada mix de normais e, assim, chegaremos à extrações mix de normais. Defina N como a probabilidade de que o retorno para um dia, de uma ação qualquer, seja menor do que a extração e_i, obtida pelo gerador de números. Denote N como π, tal que e_i seja o π-ésimo fractil da distribuição normal. A fim de encontrar um número que corresponda à este mesmo fractil para a distribuição mix de normais, usaremos a função inversa da acumulada da mix de normais.Este procedimento será explicado mais detalhadamente adiante. E importante explicar que usamos este procedimento devido a impossibilidade de obter-se amostras aleatórias de uma distribuição mix de normais, levando-se em consideração as correlações. Se isto fosse possível, poderíamos simplesmente definir um portfólio qualquer e submete-lo à tais amostras, afim de encontrar seus percentis. Infelizmente, ainda que seja possível obter amostras aleatórias de uma mix de normais usando-se as distribuições binomial e a normal, não é possível obter extrações correlacionadas, o que é fundamental para o modelo em questão. Assim faz-se nescessária uma manipulação das extrações normais, estas sim levando em consideração as correlações observadas entre os diversos ativos, para que possamos obter as extrações mix de normais correlacionadas. Só então é que poderemos submeter o portfólio a tais extrações e encontrar os percentis . Outro ponto importante é a estimação das correlações entre os ativos. Como estaremos usando extrações de uma normal e, através do processo de Monte Carlo, usando a matriz de Choleski para obtenção de extrações correlacionadas, não poderemos usar os dados observados para estimar as correlações, já que estamos supondo que estes seguem uma distribuição mix de normais. Devemos, então, utilizar o processo inverso ao que foi explicado anteriormente para obtenção das amostras mix de normais, ou seja, a partir das séries de retornos observados, usaremos a funcão de probabilidade acumulada mix de normais para achar um fractil qualquer e depois utilizar a função inversa da acumulada de uma normal padrão, para obter que amostra representa este mesmo fractil na distribuição normal. A partir deste procedimento construiremos uma série de amostras com as quais iremos estimar as correlações que serão usadas no Monte Carlo.

III.2.2. - Estimação dos parâmetros

Nossa hipótese é que os retornos diários de algumas ações do mercado brasileiro possam ser representados por um mix de duas distribuições normais de média zero.

Definimos os desvios padrão das distribuições como $u\sigma$ e $v\sigma$ onde $u < 1$ e $v > 1$. Supondo que as quantidades proporcionais das duas distribuições normais no mix sejam p e $1 - p$, temos :

$$pu^2 + (1 - p)\,v^2 = 1$$

Para testar o modelo devemos usar valores p, u e v consistentes com a equação acima e que forneçam um melhor ajustamento da distribuição aos dados empíricos. A abordagem natural seria maximizar função de log-verossimilhança :

$$\sum_t \log\left[\frac{p}{u\sigma}\exp\left(-\frac{e_i^2}{2u^2\sigma^2}\right) + \frac{1-p}{v\sigma}\exp\left(\frac{e_i^2}{2v^2\sigma^2}\right)\right] .$$

Um problema com este método, que foi apontado por Hamilton(1991), é que a tentativa de maximizar esta função pode levar à instabilidade, soluções locais e problemas de não convergência. Outro problema e que os valores de p, u e v que promovem o melhor ajustamento da distribuição aos dados são enormemente influenciados por dados extremos. Pode parecer estranho que nos preocupemos com o efeito adverso que dados extremos têm sobre os parâmetros, quando o objetivo do nosso modelo é justamente capturar a probabilidade de eventos extremos mais precisamente. O argumento é o seguinte: quando calculamos o VaR, não estamos preocupados em modelar os eventos realmente extremos (o percentil 99.99% por exemplo) da distribuição das variáveis de mercado, em detrimento de um decréscimo na precisão com que os percentis 99% e 95% são modelados. Isto porque o percentil 99.99% não é precisamente determinado pelos dados históricos e não influencia o cálculo do VaR para os intervalos de confiança geralmente escolhidos. Para ilustrar este segundo problema, usou-se este modelo para estimar os valores de p, u e v para a moeda da Austrália(AUD). Maximizando a função de log-likelihood para uma base de dados entre 4/1/88 e 28/6/94 as estimativas de p, u e v foram 0.82, 0.72 e 1.80. Quando a maior taxa de variação(5.53 desvios padrão) foi retirada da amostra, as estimativas mudaram para 0.78, 0.71 e 1.68. Quando a segunda maior taxa de variação(5.29 desvios padrão) foi retirada, as estimativas mudaram para 0.74, 0.68 e 1.58.

Para solucionar estes problemas, decidimos dividir os dados dos retornos em quatro categorias. Na primeira, as taxas de variações das ações foram menores do que um desvio padrão ($|e_i| < \sigma$); na segunda categoria as taxas de variação ficaram entre um e dois desvios padrão ($\sigma < |e_i| < 2\sigma$); na terceira, entre dois e três desvios padrão ($2\sigma < |e_i| < 3\sigma$); e, na quarta categoria, as taxas de variação foram maiores do que três desvios padrão ($3\sigma < |e_i|$). Nós comparamos o número de dados observados em cada categoria com o número que seria predito pela distribuição mix de normais para valores quaiquer de p, u e v e usamos um processo interativo para determinar que valores destes parâmetros maximizam a função de log- verossimilhança :

$$\sum_{k=1}^{4} \alpha_k \log(\beta_k),$$

onde α_k é a proporção observada dos dados na k-ésima categoria e β_k é a proporção indicada pela mix de normais. Foram feitos testes com vàrias taxas de câmbio entre países para analizar se podería-se utilizar os mesmos parâmetros para todos os ativos e os resultados mostraram que sim. Este teste foi feito utilizando a estatística qui-quadrada e o modelo que utiliza os mesmos p, u e v para todos os ativos não pode ser rejeitado com 95% de intervalo de confiança. Para os ativos da bolsa brasileira, no entanto, o modelo em que se utilizam os mesmos p, u e v não pareceu se ajustar bem aos dados, fazendo-se nescessária a estimação de parâmetros para cada ação. Isto provavelmente ocorre devido as particularidades do mercado brasileiro de ações, em que estas sofrem muita influência por motivos especulativos e de liquidez. Utilizando dados de 6/7/95 até 5/5/97, estimamos os seguintes parâmetros para os ativos em questão :

Ativo	IND	ELE3	ELE6	PET4	TEL3	TEL4	TEL5	TLS4	VAL4
p	0.854157	0.487557	0.754311	0.315786	0.937839	0.940993	0.515122	0.756468	0.533468
u	0.81703	0.617764	0.727106	0.64438	0.881026	0.935263	0.199882	0.701331	0.603909
v	1.716721	1.260292	1.564299	1.126895	2.091989	1.731446	1.421242	1.605736	1.313942

Explicando mais detalhadamente o procedimento de estimação dos parêmetros, o que fizemos foi o seguinte : definimos uma combinação de p, u e v aleatória para servir de ponto de partida. Determinamos as probabilidades de ocorrerem eventos menores que um desvio padrão, entre um e dois desvios padrão, entre dois e três desvios padrão e maiores do que três desvios, segundo a função de probabilidade acumulada de uma mix de normais com os parâmetros p, u e v iniciais. Para facilitar usamos os retornos normalizados das ações (e_i / σ_I), e passamos a computar as proporções em que estes eram menores que um, entre um e dois, entre dois e três e maiores que três, o que significa exatamente o mesmo que havíamos feito antes com os retornos não normalizados. As proporções teòricas Pι (P_1, é a probabilidade de que o retorno normalizado seja menor do que 1)serão as seguintes :

$$P_\iota = 1 - 2\,[\,p \times NORMDIST(-\iota,0,u) + (1-p) \times NORMDIST(-\iota,0,v)\,]$$, onde ι = 1, 2 e 3

Para obtermos as probabilidades de os retornos normalizados estarem entre um e dois, e entre dois e três, P_2 - P_1 e P_3 - P_2, respectivamente. Quanto a probabilidade do retorno normalizado ser maior do que três, fazemos 1 - P_3. Assim usando um processo interativo, vamos substituindo os valores iniciais dos parâmetros, afim de minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre as proporções teóricas e as proporções observadas, levando em consideração a restrição $pu^2 + (1 - p)\,v^2 = 1$.

III.2.3. Estrutura do Modelo

Nesta parte do trabalho tentaremos especificar melhor o modelo que foi apresentado no tópico "Visão Geral". O modelo pode ser dividido em três partes : a obtenção da matriz de correlação através de uma manipuilação dos dados históricos, a obtenção de uma série de amostras mix de normais que levem em conta estas correlações e a simulação do valor de um portfolio qualquer a partir destas amostras. No tocante à simulação do valor do portfolio, não existe qualquer diferença para o modelo que utiliza a distribuição normal.

Existem duas alternativas para se estimar o valor do seu portfolio, supondo que neste existam opções, para as taxas de variação geradas pelo modelo : "delta valuation" e simulação total. O primeiro consiste na estimativa do valor da sua carteira de ativos, levando em conta somente o financeiro alavancado desta. Este é o valor correspondente, em ações, de todo o seu porfolio. Ele é calculado através de uma aproximação linear, da taxa com que o preço das opções varia, em relação ao preço do ativo subjacente. Mais formalmente :

$$\Pi = \Pi(S_1, S_2, S_3, ..,S_n) = \sum_{i=1}^{n} P_i \times Q_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} c_{ij}(P_i) \times Q^C_{ij} \quad ,$$

onde, n é o número de ações, m é o número de opções sobre uma ação n qualquer, P é o preço de uma ação n qualquer, Q é a quantidade de uma ação qualquer, Q^c é a quantidade de uma opção qualquer, c é o preço de uma opção qualquer(como função do preço da ação subjacente) e Π é o financeiro do portfolio. Aproximação de primeira ordem, ou por delta consiste no seguinte :

$$\Delta\Pi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\Pi}{\partial P_i} \times P_i \times \left(\frac{\Delta P_i}{P_i}\right)$$

sendo que,

$$\frac{\partial\Pi}{\partial P_i} = Q_i + \sum_{j=1}^{m_i} \frac{dc_{ij}(P_i)}{dP_i} \times Q^C_{ij},$$

assim temos que o financeiro alavancado, α_i, para cada ação é :

$$\alpha_i \equiv \frac{\partial \Pi}{\partial \mathrm{P}_i} \times \mathrm{P}_i = [\; Q_i + \sum_{j=1}^{m_i} \frac{dc_{ij}(\mathrm{P}_i)}{d\mathrm{P}_i} \times Q^c_{ij} \;] \times \mathrm{P}_i$$

e que a variação no valor do portfolio para mudanças no preço das ações será :

$$\Delta\Pi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\frac{\Delta \mathrm{P}_i}{\mathrm{P}_i} \right) .$$

Poderíamos usar tal metodologia no nosso modelo, entretanto este tipo de arpoximação é bastante criticado, principalmente no que tange à linearização da relação entre o preço da opção e o preço da opção. Desta forma, usaremos o modelo de simulação total que, apesar de ser um pouco mais trabalhoso na implementação, fornece resultados mais precisos.

O modelo de simulação total caracteriza-se pela reestimação do valor de todos os ítens do portfolio, inclusive as opções, para variações dos preços das ações. Isto é feito utilizando-se a enormemente difundida fórmula de *Black&Scholes.* O procedimento torna-se mais trabalhoso na medida em que, para cada taxa de variação do preço de uma ação qualquer gerada pelo modelo, teremos que usar a fórmula de precificação e encontrar o preço das opções subjacentes à esta ação. Quanto ao resto do procedimento, este não se altera, consistindo na geração de uma série de taxas de variação de preços das ações, levando em conta as correlações observadas entre estas, para depois aplicá-las no portfolio e estimar seu valor.

Quanto à estimação da matriz de correlação, esta etapa é particularmente importante. O grande problema que enfrentamos quando supomos que os retornos diários dos ativos seguem a distribuição mix de normais, é que é impossível fazer extrações correlacionadas a partir desta distribuição. No caso em que supomos que os retornos seguem uma normal, basta fazermos o procedimento de Choleski e, a partir de uma série de extrações normais randômicas, chegamos

à nossas amostras correlacionadas. A maneira com que vamos resolver este problema é a seguinte:

$R_{ij} \sim$ mix de normais $\left(p^i, \sigma_u^{2i}, \sigma_v^{2i}\right)$,

i = 1,2,3,...,n onde n é o número de ações e

j = 1,2,3,...,m onde m é o número de observações.

Seja,

$$\gamma_{ij} = F_{R_i}\left[R_{ij}\right]$$

onde, F_{R_i} é a função de distribuição deprobabilidade acumulada de R_i. O que queremos demonstrar é que a série de γ_{ij} é do tipo :

$$\left(\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \gamma_{i_3}, \ldots, \gamma_{i_m}\right) \underset{\approx}{\overset{IID}{\text{---}}} \text{U}\,[0,1] \;,$$

ou seja, a série é independente e identicamente distribuida segundo uma uniforme [0,1].

Para demonstrar isto, temos que provar o seguinte teorema :

Teorema: Para todo real t, temos que

$$F_\gamma(t) = t$$

Demonstração: Seja um real t qualquer. Em primeiro lugar, segue da propriedade de monotonicidade crescente da distribuição de probabilidade acumulada que:

$$F_x(t) = \Pr ob[\gamma \leq t] = \Pr ob[x \leq F_x^{-1}(t)] \quad (1)$$

$$F_X[F_X^{-1}(t)] = \Pr ob[x \leq F_x^{-1}(t)] \quad (2)$$

$$t = F_X \circ F_X^{-1}(t) = F_X[F_X^{-1}(t)] \quad (3)$$

segue de (1) , (2) e (3), que a série de γ é IID uniforme [0,1].

Tendo demonstrado que a série é uniforme [0,1], podemos fazer,

$$e_{ij} = F_{NP}^{-1}(\gamma_{ij}) \, ,$$

onde F_{NP}^{-1} é a inversa da acumulada da normal padrão e e_{ij} vai ser a série de retornos que usaremos para estimar as correlações entre os ativos. Desta forma teremos :

$$\left(e_{i1}, e_{i2}, e_{i3}, \ldots, e_{im}\right) \frac{IID}{\approx} N(0,1)$$

A partir desta série, calcularemos as correlações pelo método do decaimento exponencial. A covariância para duas séries x e y, é definida por :

$$\sigma_{xy} = (1-\lambda)\sum_{i=1}^{k} \lambda^{i-1}\left(x_{t-i} - \eta_x\right)\left(y_{t-i} - \eta_y\right),$$

sendo a correlação entre estas séries :

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \qquad (4)$$

,onde σ_{xy} é a covariância entre **x** e **y**, σ_x e σ_y são, respectivamente, o desvio-padrão de **x** e **y**. Perceba que, ao contrário do que fazemos para o modelo que supõe distribuição normal, não vamos usar a matriz de covariância para a fatorização de Choleski, mas sim, a de correlação. Isto se dá porque já sabemos o resultado teórico acerca da matriz de covariância : como a série e_{ij} vem da inversa da acumulada de uma normal padrão(média zero e desvio padrão um), as covariâncias devem ser iguais às correlações(se $\sigma_x = \sigma_y = 1$, em (4), $\rho_{xy} = \sigma_{xy}$).

Quanto a obtenção de uma série de amostras mix de normais, que levem em conta estas correlações que foram estimadas a partir da série de e_{ij}, o processo é muito parecido com o que foi usado para anteriormente, só que agora estaremos partindo de amostras normais[0,1], e manipulando-as de forma a obter uma série de extrações mix de normais. Isto será feito baseado na mesma hipótese de que a série gerada por uma função de probabilidade acumulada é uniforme[0,1]. O processo se dará desta forma :

sobre as amostras normais[0,1], geradas por um gerador de números aleatórios, usaremos a função de probabilidade acumulada da normal para gerarmos uma série κ_{ij}. A partir desta série usaremos a função inversa da acumulada da mix de normais para obter-mos uma série w_{ij}, que será a série de taxas de variação que vamos usar para reestimar o valor do portfólio. É preciso lembrar que, como trabalhamos com as séries de retornos normalizados, é necessário multiplicar esta série w_{ij}, pelo desvio padrão do dia em que a simulação será efetuada. Mais explicitamente: nossa base de dados foi criada dividindo-se o retorno das ações pelos seus respectivos desvios padrão. Todo o resto do modelo foi trabalhado com os retornos normalizados e, para encontrarmos os efeitos das extrações mix de normais sobre o portfolio, temos que multiplicar a série destas pelo desvio padrão, caso contrário estaríamos trabalhando com extrações normalizadas e este não é o nosso intuito.

Agora que já explicamos a teoria por trás do modelo vamos à parte prática. Um problema a este respeito é o fato de as opções vencerem, o que impossibilitaria análises de consistência do modelo, já que este não poderia ser avaliado e comparado em vários períodos. Uma solução encontrada foi estabelecer opções por tipo, ou seja, dividi-las em categorias tais quais, in-the- money, out-the-money e at-the-money, sendo o critério de divisão baseado na possibilidade de exercício das opções. Desta forma compomos um portfolio aleatório e testamos nosso modelo.

Os teste foram feitos de forma a comparar os resultados do Monte Carlo com a distribuição normal, o Monte Carlo com a distribuição mix de normais e os resultados efetivos. Isto foi feito através de um "back-test", onde estimamos os valores para os percentis dos dois modelos de Monte Carlo e os resultados que efetivamente ocorreriam caso possuíssemos o portfolio.

IV. Resultados

O portfolio que foi usado no modelo é o que se segue :

Ativo	IND	ELE3	ELE6	PET4	TEL3
Quantidade	(100)	10000000	(1100000)	10000000	15000000

Ativo	TEL4	TEL5	TLS4	VAL4	IN(opção)
Quantidade	150000000	(3000000)	(10000)	50000	100000

Antes de expormos os resultados do modelo propriamente dito, é interessante notar algumas particularidades no período em que os testes foram realizados. Nos anexos de gráfico 2 e 3, podemos ver as correlações entre os ativos que analisamos e notar como existe aumento das correlações no período de alta volatilidade entre 21/10/97 e 06/11/97. A conclusão que chegamos é de que, quando ocorrem grandes movimentos no mercado de bolsa brasileiro, todas as ações movem-se no mesmo sentido. Neste período de instabilidade, o que se viu foram altas e quedas de todas as ações ao mesmo tempo, o que gerou o aumento das taxas de correlação estimadas. Diante de tal cenário, uma reestimação dos parâmetros do modelo seria interessante, avaliando a sensibilidade destes quanto à períodos atíposcomo o que se segui. As tabelas a seguir mostram uma comparação entre as já definidas proporções de retornos normalizados para o período que usamos inicialmente e para o segundo semestre de 1997.

1° período	IND	ELE3	ELE6	PET4	TEL3	TEL4	TEL5	TLS4	VAL4
$\|e_i\|<\sigma$	72.89%	72.85%	74.66%	70.14%	70.59%	67.87%	76.44%	75.22%	73.76%
$\sigma<\|e_i\|<2\sigma$	22.22%	21.27%	20.36%	23.98%	24.89%	27.15%	15.56%	19.03%	19.91%
$2\sigma<\|e_i\|<3\sigma$	3.56%	4.98%	4.07%	5.43%	3.17%	4.07%	5.78%	3.98%	4.98%
$3\sigma < \|e_i\|$	1.33%	0.90%	0.90%	0.45%	1.36%	0.90%	2.22%	1.77%	1.36%

2°semest.	IND	ELE3	ELE6	PET4	TEL3	TEL4	TEL5	TLS4	VAL4
$\|e_i\|<\sigma$	68.14%	68.14%	66.81%	67.70%	67.70%	67.70%	75.22%	67.26%	72.12%
$\sigma<\|e_i\|<2\sigma$	22.12%	23.89%	25.66%	24.34%	26.11%	24.78%	16.37%	26.11%	18.14%
$2\sigma<\|e_i\|<3\sigma$	7.08%	5.75%	5.75%	5.31%	3.54%	4.42%	5.31%	4.87%	6.64%
$3\sigma < \|e_i\|$	2.65%	2.21%	1.77%	2.65%	2.65%	3.10%	3.10%	1.77%	3.10%

Pode-se notar claramente que houve uma retirada de massa de probabilidade das regiões centrais da distribuição para as caudas, devido as grandes taxas de variação ocorridas no final do segundo semestre de 1997. As estimativass dos parâmetros foram refeitas e produziram os seguintes resultados:

Ativo	IND	ELE3	ELE6	PET4	TEL3	TEL4	TEL5	TLS4	VAL4
p	0.213343	0.470068	0.319852	0.175293	0.969513	0.610551	0.490167	0.824767	.0537905
u	0.517445	0.607627	1.000000	0.612378	0.942845	0.866072	0.001500	0.968735	.0588266
v	1.094800	1.248812	1.000000	1.064351	2.128674	1.179748	1.400509	1.13577	1.327113

Outro ponto interessante é avaliar o quanto a matriz de correlação é afetada pela manipulação que impomos aos dados históricos, o que pode ser visto no anexo de gráficos 4, onde comparamos as correlações entre o índice futuro e todos os outros ativos estimadas a partir da série original com a série de e_{ij} obtida após a manipulação da série. O quadro abaixo mostra a diferença percentual média entre as séries :

IND X	ELE3	ELE6	PET4	TEL3	TEL4	TEL5	TLS4	VAL4
erro médio	2.63%	3.38%	2.85%	1.43%	1.40%	8.74%	3.78%	7.87%

Quanto aos resultados do modelo, para o período de 03/06/97 até 17/10/97, obtivemos :

Resultados

Modelo	Mix de Normais	Normal
Dias fora (0.5%-99.5%)	2 (2.02%)	3 (3.03%)
Erro Médio	17.9 %	19.8%

Modelo	Mix de Normais	Normal
Dias fora (1%-99%)	10(10.1%)	10(10.1%)
Erro Médio	22.2%	22.5%

Como queríamos captar o efeito da ocorrência de observações extremas com mais frequência do que é indicado pela distribuição normal, o resultado dos modelos deveria indicar percentis 0.5%-99% mais conservadores para o modelo com distribuição mix de normais do que para o modelo com distribuição normal. Isto realmente ocorreu e pode ser observado no anexo de gráficos 5. O modelo de Monte Carlo com a distribuição mix de normais apresentou percentis 0.5%-99.5%, em média, 10.61% maiores que o modelo para distribuição normal. Tal diferença permitiu ao modelo de mix de normais captar uma observação que saiu do intervalo de confiança estimado pelo modelo com distribuição normal.

V. CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho foi testar um modelo de mensuração de risco, o modelo de Monte Carlo com distribuição mix de normais. A análise foi feita comparando-se os resultados obtidos por este modelo com os resultados obtidos pelo modelo de Monte Carlo com distribuição normal. Isto, porque queríamos analisar não só se o modelo era eficiente, mas se o uso da distribuição mix de normais traria ganho de precisão à estimativa de risco. A diferença básica entre os dois modelos é que, em um, pressupomos que os retornos diários dos ativos analisados seguem a distribuição normal, enquanto no outro, o pressuposto é de que tais retornos sigam a distribuição mix de normais. O incentivo ao uso deste modelo foi a constatação da existência de curtose positiva na distribuição empírica dos retornos dos ativos, ou seja, que eventos extremos ocorrem mais frequentemente do que a distribuiçào normal supõe. Constatou-se ainda a existência de assimetria à direita nos retornos, o que significa que taxas de retorno positivas ocorreram com mais frequência do que taxas de retorno negativas. Esta característica também vai de encontro ao pressuposto de que os retornos sigam uma distribuição normal, sendo esta uma distribuição perfeitamente simétrica. Esta característica pode ser captada por um modelo parecido com o que usamos, mas que usa a distribuição mix de normais com médias diferentes, enquanto que no modelo apresentado as médias eram iguais a zero. O modelo que utilizamos pode ser dividido em três partes : estimação dos parâmetros, obtenção de um grande número de amostras de taxas de variação e estimação do valor de um portfolio qualquer para estas amostras de taxa de variação. Concluídos os testes obtivemos o resultado que era esperado, ou seja, os percentis críticos do modelo mix de normais foram consistentemente maiores que os do modelo para distribuição normal. Este resultado era esperado já que o modelo mix de normais busca captar eventos extremos melhor do o modelo com a distribuição normal, sendo assim um modelo mais conservador. Apesar do modelo com mix de normais ter captado uma observação que extrapolou o intervalo de confiança estimado pelo modelo com distribuição normal, não podemos definir um que seja sempre melhor que o outro. A definição sobre que modelo deve ser usado fica a caráter do usuário, levando em consideração o grau de conservadorismo desejado para os percentis.

Bibliografia

- ALLEN, Michael ; ***Building a Role Model*** ; Risk Magazine , September 1994

- GREENE, William H.; ***Econometric Analysis*** ; New York University, 1993

- HAMILTON, James D.; ***Time Series Analysis***; Princeton, 1994.

- HENDRICKS, Darrryl ; ***Evaluation of Value-at-Risk Models Using Historical Data*** ; FRBNY Economic Policy Review , April 1996

- HULL, John e WHITE, Alan ; ***Taking account of the curtose in market variables when calculating Value at Risk*** ; University of Toronto, 1997

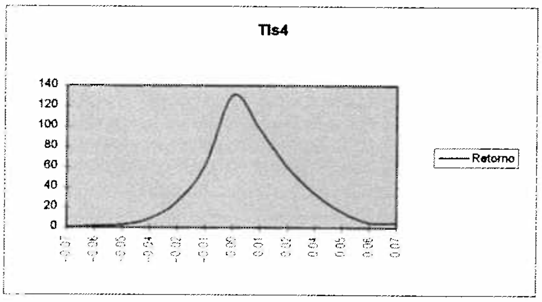
- ***Value at Risk : A Risk Special Supplement*** ; in Risk Magazine, June 1996

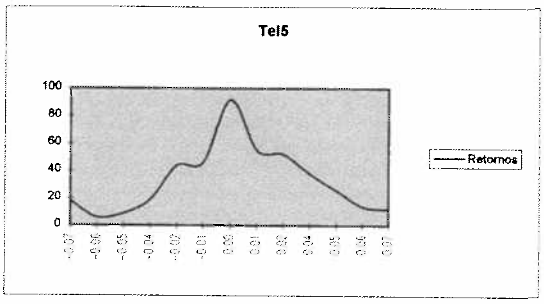
- ***VaR*** ; Risk Magazine

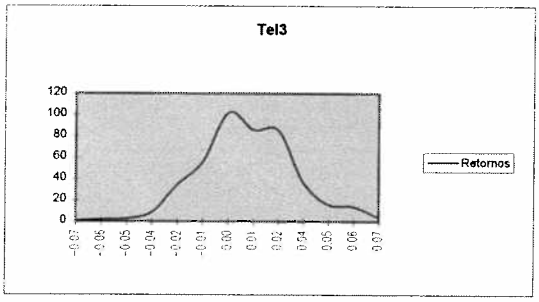
- WILSON, Duncan ; ***VaR in Operation*** ; Risk Magazine , December 1995

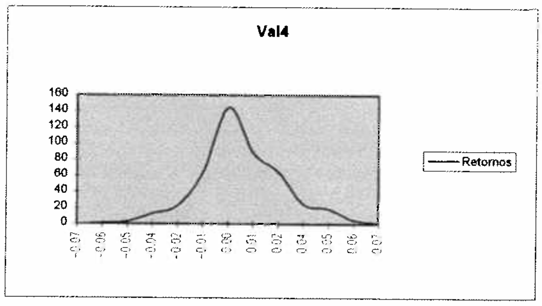
Anexo de Gráficos

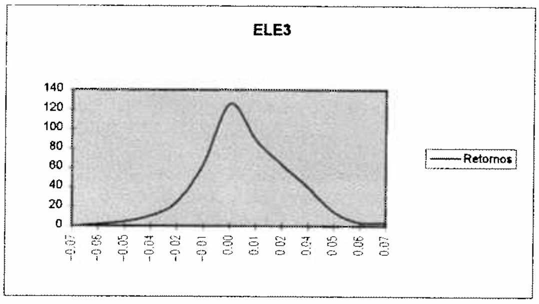
ANEXO1

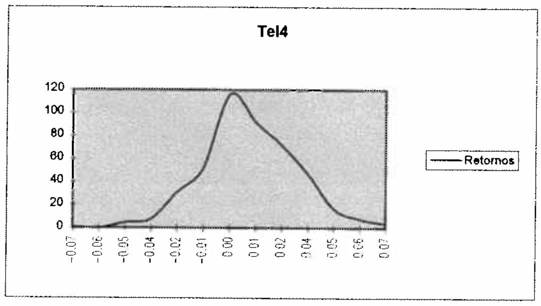

Tls4
140 120 100 80 60 40 20 0
-0.07 -0.06 -0.05 -0.04 -0.02 -0.01 0.00 0.01 0.02 0.04 0.05 0.06 0.07
Retorno

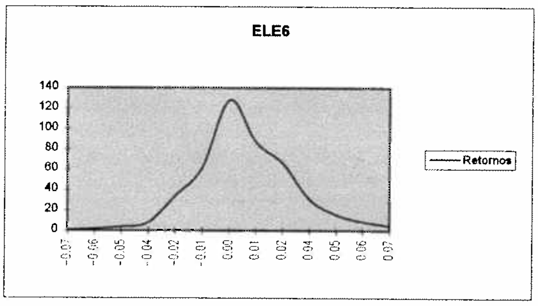

Tel5
100 80 60 40 20 0
-0.07 -0.06 -0.05 -0.04 -0.02 -0.01 0.00 0.01 0.02 0.04 0.05 0.06 0.07
Retornos

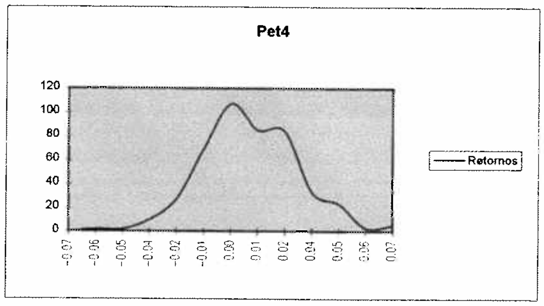

Tel3
120 100 80 60 40 20 0
-0.07 -0.06 -0.05 -0.04 -0.02 -0.01 0.00 0.01 0.02 0.04 0.05 0.06 0.07
Retornos

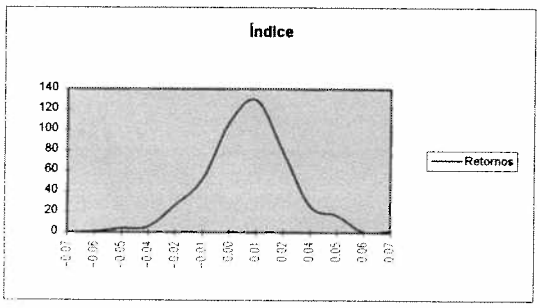

Val4
160 140 120 100 80 60 40 20 0
-0.07 -0.06 -0.05 -0.04 -0.02 -0.01 0.00 0.01 0.02 0.04 0.05 0.06 0.07
Retornos


ELE3
140 120 100 80 60 40 20 0
-0.07 -0.06 -0.05 -0.04 -0.02 -0.01 0.00 0.01 0.02 0.04 0.05 0.06 0.07
Retornos

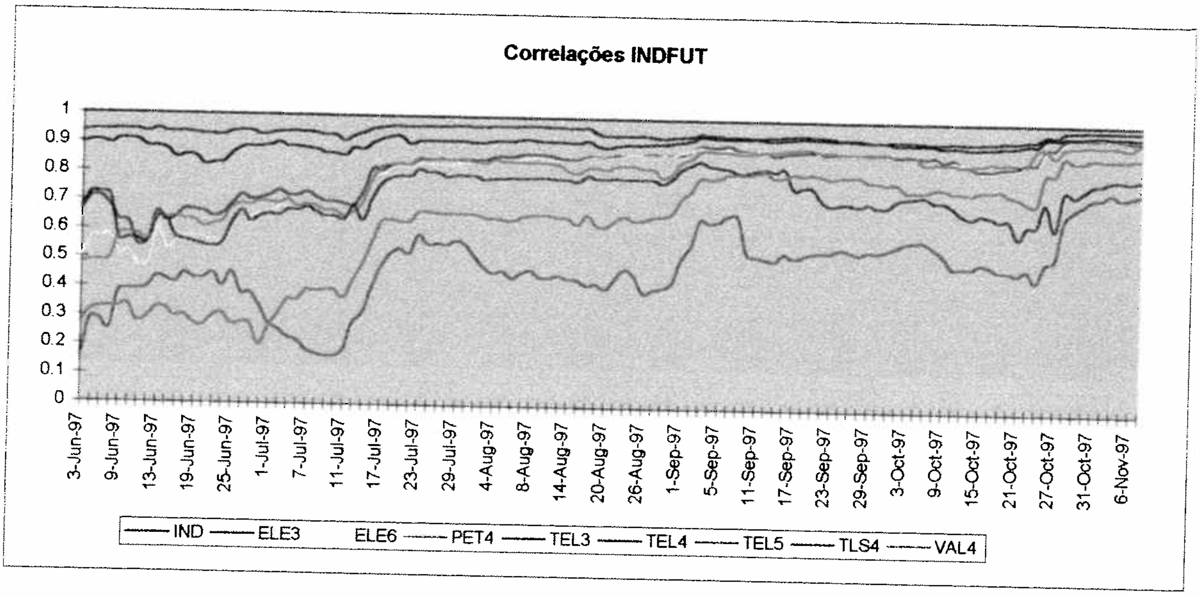

Tel4
120 100 80 60 40 20 0
-0.07 -0.06 -0.05 -0.04 -0.02 -0.01 0.00 0.01 0.02 0.04 0.05 0.06 0.07
Retornos


ELE6
140 120 100 80 60 40 20 0
-0.07 -0.06 -0.05 -0.04 -0.02 -0.01 0.00 0.01 0.02 0.04 0.05 0.06 0.07
Retornos


Pet4
120 100 80 60 40 20 0
-0.07 -0.06 -0.05 -0.04 -0.02 -0.01 0.00 0.01 0.02 0.04 0.05 0.06 0.07
Retornos


Índice
140 120 100 80 60 40 20 0
-0.07 -0.06 -0.05 -0.04 -0.02 -0.01 0.00 0.01 0.02 0.04 0.05 0.06 0.07
Retornos

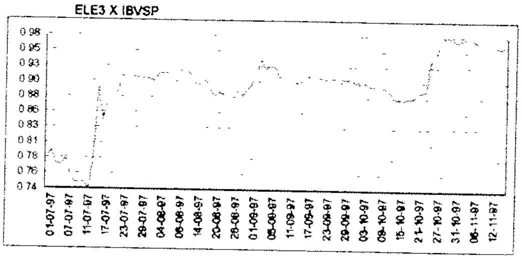
ANEXO 2



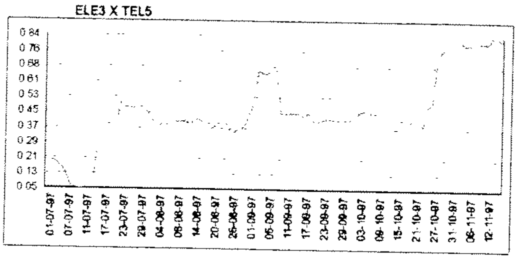
Correlações INDFUT
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
3-Jun-97
9-Jun-97
13-Jun-97
19-Jun-97
25-Jun-97
1-Jul-97
7-Jul-97
11-Jul-97
17-Jul-97
23-Jul-97
29-Jul-97
4-Aug-97
8-Aug-97
14-Aug-97
20-Aug-97
26-Aug-97
1-Sep-97
5-Sep-97
11-Sep-97
17-Sep-97
23-Sep-97
29-Sep-97
3-Oct-97
9-Oct-97
15-Oct-97
21-Oct-97
27-Oct-97
31-Oct-97
6-Nov-97
IND
ELE3
ELE6
PET4
TEL3
TEL4
TEL5
TLS4
VAL4

ANEXO 3

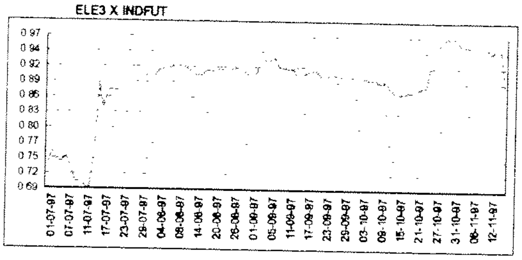
ELE3 X IBVSP



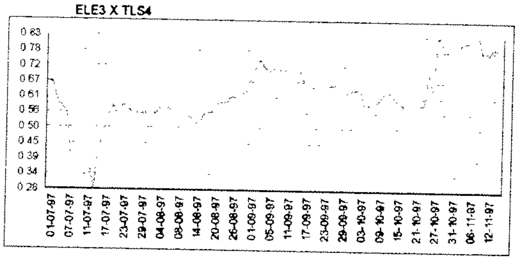
ELE3 X TEL5



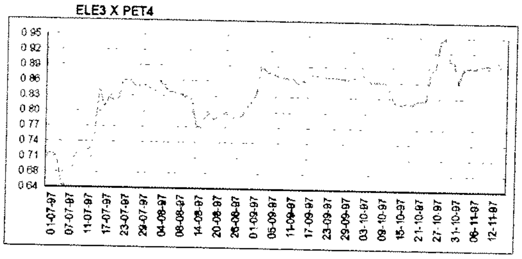
ELE3 X INDFUT



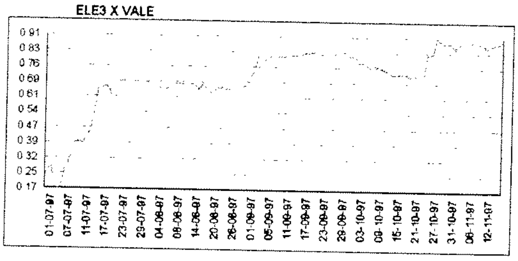
ELE3 X TLS4



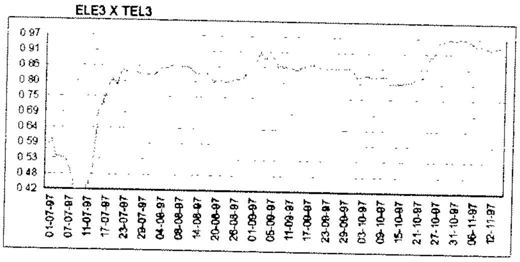
ELE3 X PET4



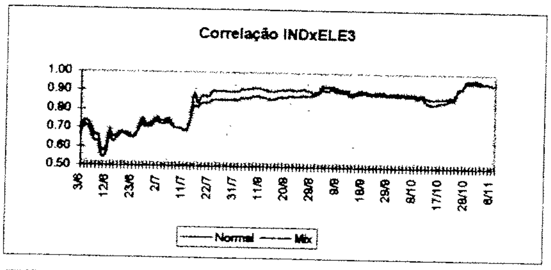
ELE3 X VALE

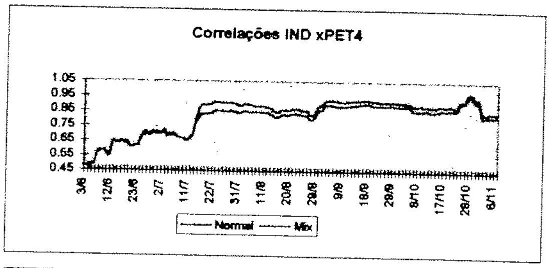


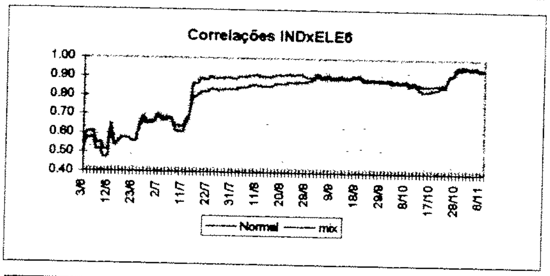
ELE3 X TEL3

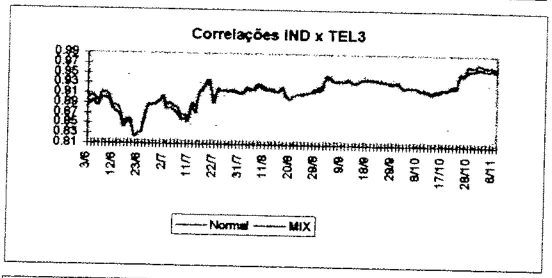


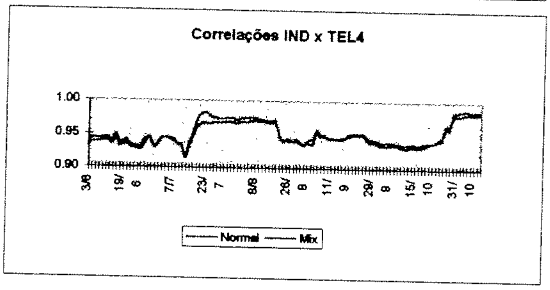
ANEXO 4

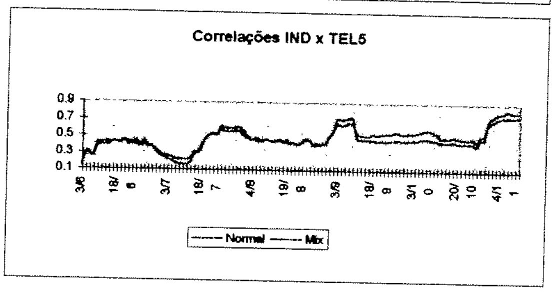

Correlação INDxELE3
Normal
Mix

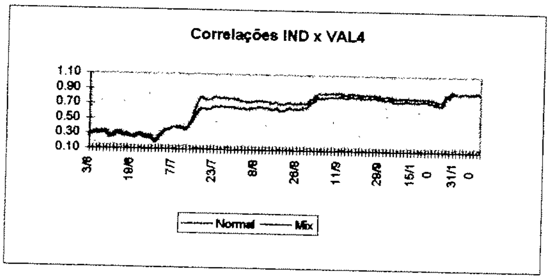

Correlações IND xPET4
Normal
Mix

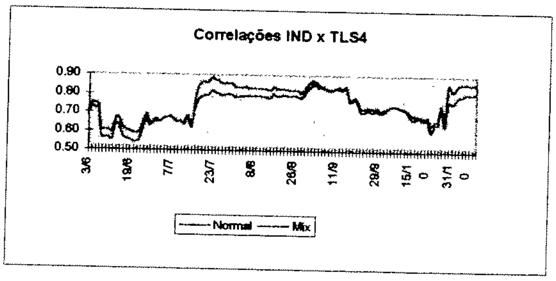

Correlações INDxELE6
Normal
mix


Correlações IND x TEL3
Normal
MIX

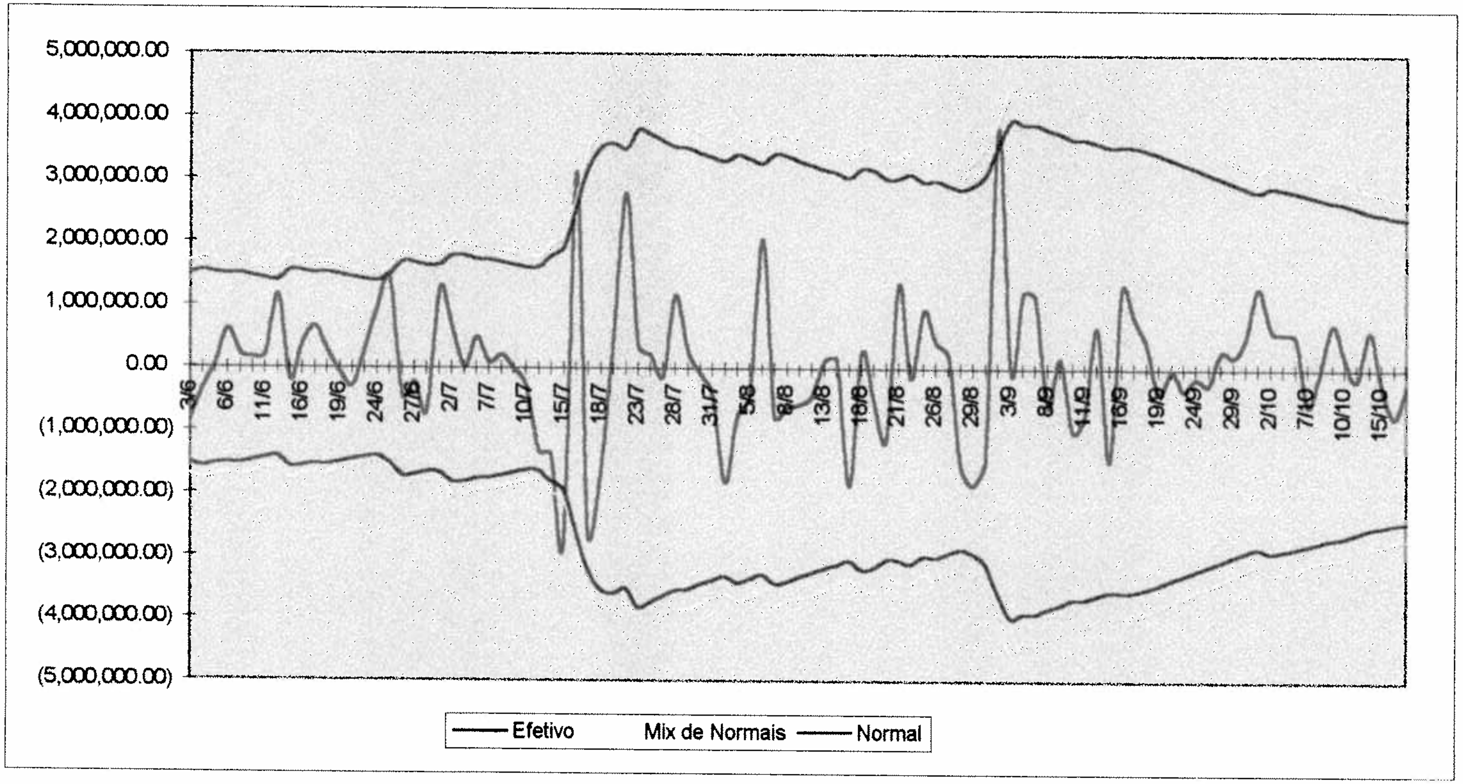

Correlações IND x TEL4
Normal
Mix


Correlações IND x TEL5
Normal
Mix


Correlações IND x VAL4
Normal
Mix


Correlações IND x TLS4
Normal
Mix

ANEXO 5


5,000,000.00
4,000,000.00
3,000,000.00
2,000,000.00
1,000,000.00
0.00
(1,000,000.00)
(2,000,000.00)
(3,000,000.00)
(4,000,000.00)
(5,000,000.00)
3/6
6/6
11/6
16/6
19/6
24/6
27/6
2/7
7/7
10/7
15/7
18/7
23/7
28/7
31/7
5/8
8/8
13/8
18/8
21/8
26/8
29/8
3/9
8/9
11/9
16/9
19/9
24/9
29/9
2/10
7/10
10/10
15/10
Efetivo
Mix de Normais
Normal