

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

MONOGRAFIA DE FINAL DE CURSO

UTILIZAÇÃO DE MODELOS NÃO-LINEARES NÃO-GAUSSIANOS
PARA ESTIMAÇÃO DE VOLATILIDADE
DE SÉRIES TEMPORAIS FINANCEIRAS

MÁRCIO RODRIGUES BERNARDO

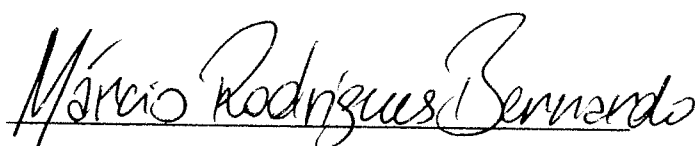
N^o de matrícula: 9215705-6

ORIENTADOR: CRISTIANO A. C. FERNANDES

JULHO DE 1998

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA
MONOGRAFIA DE FINAL DE CURSO

UTILIZAÇÃO DE MODELOS NÃO-LINEARES NÃO-GAUSSIANOS
PARA ESTIMAÇÃO DE VOLATILIDADE
DE SÉRIES TEMPORAIS FINANCEIRAS



MÁRCIO RODRIGUES BERNARDO

Nº de matrícula: 9215705-6

ORIENTADOR: CRISTIANO A. C. FERNANDES

JULHO DE 1998

“ Declaro que o presente trabalho é de minha autoria e que não recorri para realiza-lo, a nenhuma forma de ajuda externa, exceto quando autorizado pelo professor tutor”.

“As opiniões expressas neste trabalho são de responsabilidade única e exclusiva do autor”

Agradecimentos:

- Aos meus pais.
- Ao Prof. Dr. Cristiano C. Fernandes pela atenção e dedicação.
- À Elisa M. Yazbeck pelo apoio.

ÍNDICE

Capítulo I – Introdução	
I.1 – Conceito de Volatilidade.....	6
I.2 – Objetivos.....	9
I.3 – Breve Esboço da Dissertação.....	10
Capítulo II – Séries Temporais Financeiras	
II.1 – Séries Temporais.....	11
II.2 – Estacionariedade.....	12
II.3 – Teste de Estacionariedade Baseado no Correlograma.....	15
II.4 – Transformação.....	20
II.5 – Fatos Estilizados das Séries Temporais Financeiras.....	22
Capítulo III – Modelos ARCH	
III.1 – Modelos de Volatilidade.....	28
III.2 – Modelo ARCH(q) – Engle(1982).....	28
III.3 – Modelo GARCH(p,q) – Bollerslev(1986).....	31
III.4 – Modelo EGARCH(p,q) – Nelson(1991).....	32
III.5 – Estimadores.....	32
Capítulo IV – Estudo Empírico.....	34
Bibliografia.....	43

CAPÍTULO I: INTRODUÇÃO

I.1 – Conceito de Volatilidade

O mercado financeiro desempenha papel fundamental na economia de um país moderno, sendo o setor responsável pela canalização eficiente dos recursos disponíveis nas poupanças interna e externa para o investimento. Neste final de século o mercado financeiro experimentou um crescimento vertiginoso no volume, na diversidade das operações e no número de participantes ativos (de forma generalizada todos os países com um nível mínimo de industrialização participam ativamente de um mercado financeiro global).

Essa globalização, diversificação e aumento do calibre afetaram profundamente as economias dos países participantes do mercado, visto que, muitos países vêm tendo sérias dificuldades em controlar o desempenho de um mercado de capitais extremamente potente, independente, volátil e de difícil regulamentação - devido a seu caráter transnacional - daí a dificuldade de se conter um ataque especulativo sobre as taxas de câmbio de países emergentes ou de fazer com que um determinado país venha a ter fluxos positivos de divisas. Sendo que o aumento da volatilidade no mercado financeiro global, a partir dos anos 80¹, está diretamente associado a esta nova realidade.

¹ Vide "Has Financial Market Volatility Increased?", Sean Beckett and H. Sellon, Jr. Economic Review, Junho 1989.

O aumento da volatilidade no mercado financeiro interessa não apenas aos investidores e analistas do mercado como também aos economistas e “*policymakers*”, tendo em vista que os efeitos da maior volatilidade no mercado financeiro sobre a economia “real” se fazem sentir nos tempos atuais².

As principais teorias de como a volatilidade afeta a economia, assim com os métodos utilizados para a correta estimação da volatilidade dos diversos ativos financeiros serão expostos a seguir.

- Volatilidade do Mercado Financeiro e Economia “real”

Volatilidade é um conceito fundamental para o entendimento do mercado e da economia nos dias atuais.

Formalmente esse conceito pode ser compreendido pela seguinte definição: “*Volatilidade é a mudança no tempo da variância condicional de uma série temporal. É um fenômeno particularmente relevante em séries financeiras, onde a variância está associada à noções de risco...*” in Veiga; Fernandes; Baidya(1993).

Alguma volatilidade no mercado financeiro é normal e até mesmo benéfica. Entretanto quando essa volatilidade é excessiva ela afeta negativamente a performance da economia, prejudicando o funcionamento correto e suave das instituições do sistema financeiro, impedindo, desse modo, uma eficiente canalização da poupança para o investimento. A excessiva volatilidade pode interferir no mercado financeiro através de diversos mecanismos.

As principais teorias correntes sobre esses canais estão dispostos a seguir.

² Vide “*Financial Market Volatility and the Economy*”, Federal Reserve Bank of Kansas City, Março de 1990

- Volatilidade nos preços de ativos financeiros.

Os canais pelo qual o excesso de volatilidade nos preços de ativos financeiros (a bolsa de valores como um todo, por exemplo) prejudicam a economia são: o nível de consumo e o nível de investimento.

As pessoas que tiverem em seu portfólio ativos financeiros terão um sensação de ficarem mais pobres se houvesse uma queda brusca nos preços dos ativos de seus portfólios e, com isso, reduziriam o nível de consumo, que afetaria negativamente a economia como um todo³.

A volatilidade nos preços dos ativos pode afetar o nível de investimento, pois os investidores ficariam mais temerosos em fazer novos investimentos em um país que apresenta excesso de volatilidade. Os investidores poderiam interpretar essa maior volatilidade como sendo um aumento do risco no retorno dos ativos e, desse modo, preferirem outros ativos com menores riscos em outros mercados. O excesso de volatilidade também pode aumentar o custo das empresas ao financiar os seus projetos de expansão assim como inviabilizar a abertura de capital, pois em uma situação de alta volatilidade os investidores tenderão a preferir ações de empresas conhecidas e de grande porte. Isso faz com que novas emissões de ações ou aberturas de capital por parte de firmas desconhecidas ou pequenas sejam dificultadas ou mesmo tal comportamento estaria anulando a função institucional da bolsa de valores e desse modo traria ineficiência ao mercado financeiro, comprometendo assim o nível de investimentos na economia.

- Volatilidade na taxa de juros

Excesso de volatilidade nas taxas de juros afeta a economia através do nível de investimentos.

³ para evidências sobre o impacto de uma queda na cotação de ações sobre o nível de consumo, vide "Has the Stock Market Crash Reduced Consumer Spending?" *Economic Review*, Abril 1988

Devido ao maior grau de risco envolvendo o mercado de títulos públicos e privados as empresas podem encontrar dificuldades e/ou custos mais altos para obtenção de créditos ou empréstimos para seus projetos de investimento e, desse modo, o nível de investimento na economia pode cair. Além disso, os investidores podem preferir mudar a composição dos seus portfólios, o que pode comprometer a política monetária do governo e gerar uma crise de liquidez.

- Volatilidade na taxa de câmbio

Extrema volatilidade na taxa cambial pode fazer com que novos investimentos externos no país sejam inibidos e investimentos preexistentes reduzidos, pois os investidores estão expostos a um risco cambial maior e, com isso, as expectativas dos retornos futuros dos investimentos diminuirão.

Além disso, este tipo de volatilidade pode provocar uma redução significativa no volume de importação do país, se os preços dos bens exportados e importados aumentarem devido ao maior risco cambial, fazendo com que o consumo desses bens seja reduzido.

Devido à importância da volatilidade para a economia e para o mercado financeiro, como já foi analisado, é de suma importância a estimação (correta e precisa), a análise e a previsão da volatilidade de diversos ativos financeiros (opções, índices, taxa de cambio, taxa de juros, “*commodities*”, retorno de “*spot*”, etc).

I.2 – Objetivos

Este trabalho tem como principal objetivo a apresentação das técnicas estatísticas para o estudo das séries temporais financeiras, com ênfase em modelos que permitem a estimação da volatilidade dessas séries.

Utilizaremos uma classe particular de modelos não-lineares não-Gaussianos denominados de família ARCH. Esses modelos são capazes de reproduzir as características observadas empiricamente nas séries temporais financeiras, tais como: excesso de curtose, conglomerados de volatilidade e ligeira assimetria.

A título de ilustração utilizaremos duas séries definidas a seguir:

- Índice IBOVESPA no período de 30 de Junho de 1998 à 30 de Dezembro de 1998.
- Preço de fechamento das ações do tipo preferencial nominal da empresa Vale do Rio Doce – VALE-PN no período de 30 de Junho de 1998 à 30 de Dezembro de 1998.

I.3 – Breve Esboço da Dissertação

Esta monografia de final de curso está estruturada em 4 capítulos, sendo o primeiro dedicado a apresentar o conceito de volatilidade e sua importância para o mercado e a economia.

O capítulo 2 está dedicado ao estudo das características empíricas das séries temporais financeiras e suas consequências sobre o processo de estimação e previsão

No capítulo 3 estudamos com algum detalhe os *Modelos da Família ARCH*. Fazemos também algumas observações sobre a capacidade desses modelos em reproduzir as características empíricas das séries.

No capítulo 4 fazemos um pequeno estudo empírico, estimamos a volatilidade das séries exemplo utilizando os modelos estudados.

CAPÍTULO II: SÉRIES TEMPORAIS FINANCEIRAS

II.1 – Séries Temporais

Série temporal é um conjunto de observações ordenadas ao longo do tempo.

Como, por exemplo: valores diário de ativos financeiros, valores mensais de temperaturas de um determinada localidade, valores anuais do PIB, etc. A figura 2.1 mostra o nível médio das exportações e das importações mensal do Brasil desde a implantação do Plano Real em julho de 1994 até janeiro de 1998.

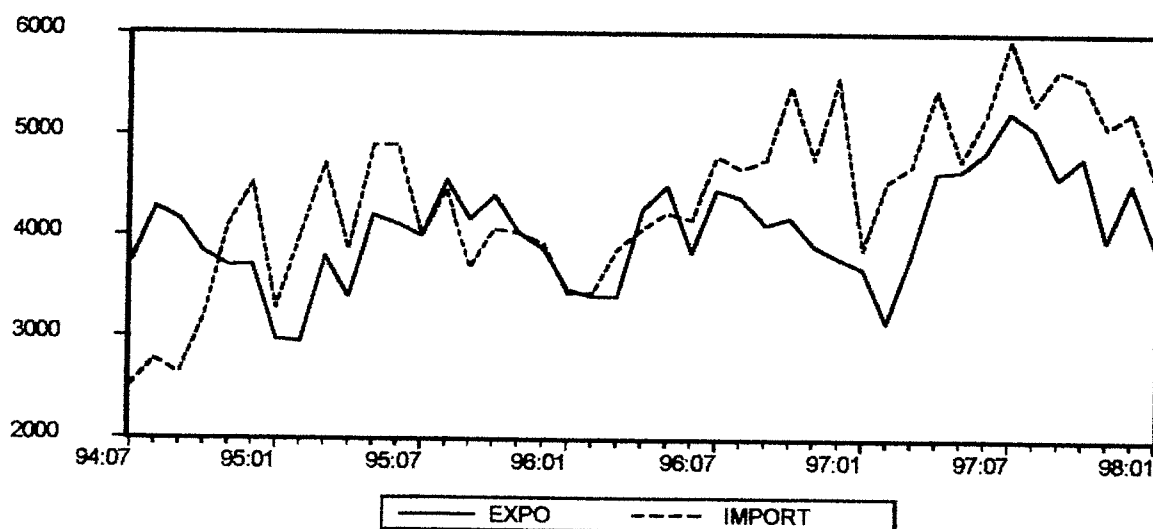


Figura 2.1 – exportações mensais do Brasil em US\$ milhões

Formalmente, uma série temporal pode ser entendida como sendo gerada por um processo estocástico, i. e.:

$$Y_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

sendo: μ_t – média não estocástica

ε_t – erro estocástico

A série temporal gerada é uma realização particular de um processo estocástico. Podemos considerar o processo estocástico como sendo a população, e a série temporal (as realizações particulares desse processo, Y_1, \dots, Y_n , para $t = 1, \dots, n$) como sendo a amostra.

Quando estamos trabalhando com séries temporais utilizamos as realizações para fazer inferências e previsões sobre o processo estocástico.

II.2 – Estacionariedade

Uma importante classe de modelos estocásticos que descreve a distribuição de séries temporais são os chamados modelos estacionários.

Uma série temporal é dita estacionária quando o processo estocástico está em estado de *equilíbrio estatístico* ao longo do tempo.

Um processo estocástico é dito como sendo estritamente estacionário se suas propriedades estatísticas não são afetadas por translações no tempo. Ou seja, a função de probabilidade que descreve esse processo em qualquer momento do tempo t_1, t_2, \dots, t_m é a mesma função de probabilidade do processo nos tempos $t_{1+k}, t_{2+k}, \dots, t_{m+k}$ sendo, k uma mudança arbitrária ao longo do eixo do tempo, i.e.:

$$\Pr (Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_m}) = \Pr (Y_{t_1+k}, Y_{t_2+k}, \dots, Y_{t_m+k})$$

Este conceito, na prática, é por demais restrito. Assim sendo utiliza-se uma definição menos restritiva de estacionariedade, denominada de estacionariedade de segunda ordem.

Este conceito de estacionariedade é particularmente bem captado por Gujarati(1995), o qual formula a seguinte definição:

“ Broadly speaking, a stochastic process is said to be stationary if its mean and variance are constant over time and the value of covariance between two time periods depends only on the distance or lag between the two time period and not on the actual time at which the covariance is computed. ”

Formalmente, se Y_t é um processo estocástico de Segunda ordem então:

Média:	$E(Y_t) = \mu$
Variância	$Var(Y_t) = E(Y_t - \mu)^2 = \sigma^2$
Covariância	$\gamma_k = E(Y_t - \mu)(Y_{t+k} - \mu)$

Isso significa que nessa série temporal estocástica a média e a variância serão constantes, ou seja, que esta série temporal não apresenta tendência ou heterocedasticidade.

Quando as propriedades estatísticas de uma séries temporal não são invariantes no tempo, então essa série temporal é dita *não-estacionária*.

Na figura 2.2.1 a série dos retornos das ações da Vale-PN (retorno sendo a diferença percentual entre as duas ultimas cotações consecutivas, $Ret. P_t = \Delta P_t / P_{t-1}$, sendo $\Delta P_t = P_t - P_{t-1}$) é evidentemente estacionária, enquanto o preço de fechamento da mesma ação na figura 2.2.2 representa uma série não-estacionária.

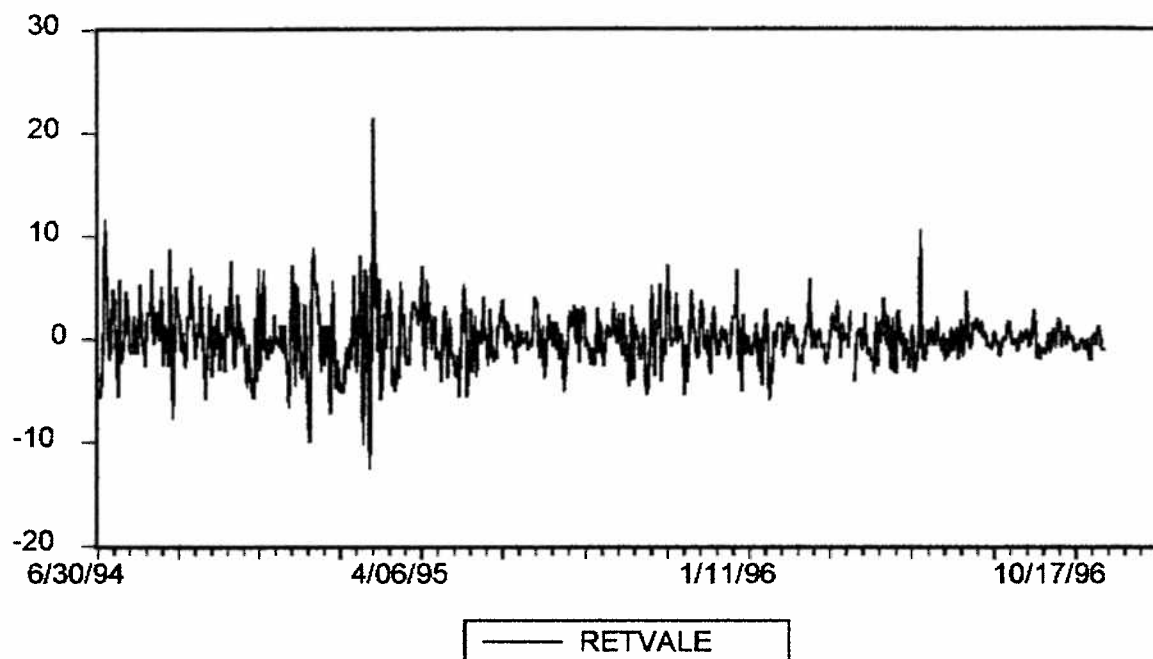


Figura 2.2.1 – Retorno da Vale-PN; Observar que a série flutua em torno de uma média quasi-constante e que sua variância é praticamente constante ao longo do tempo.

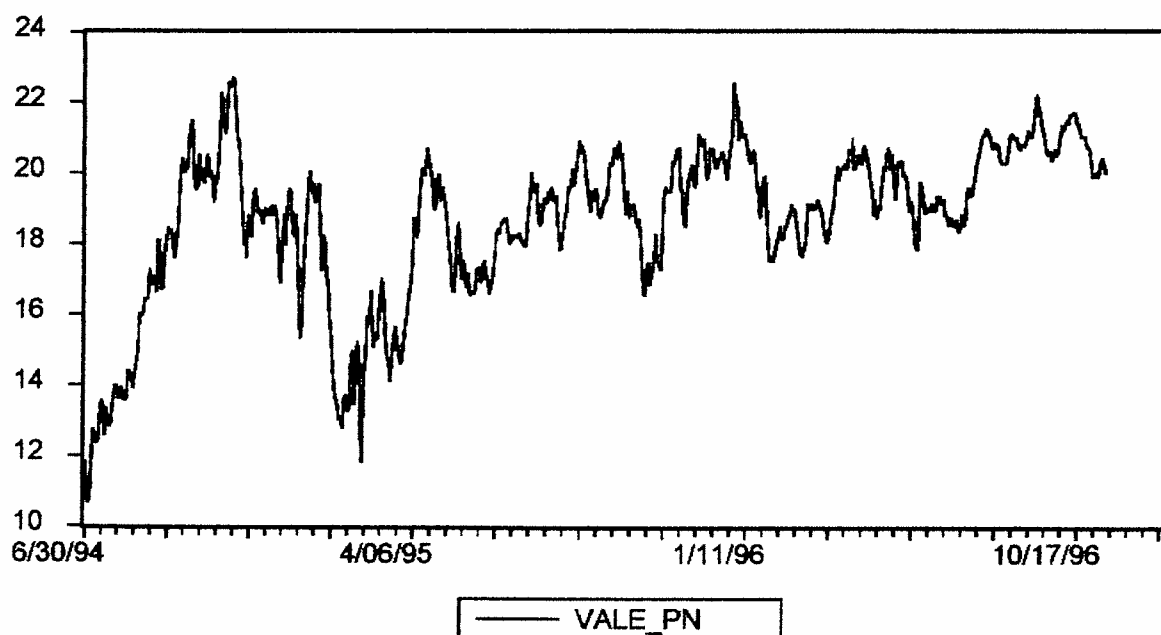


Figura 2.2.2 – Preço de fechamento da Vale-PN; Aqui não há estabilidade estatística, pois a série não flutua em torno de um ponto de equilíbrio.

A identificação de uma série temporal estacionária ou não-estacionária pode ser efetuada, inicialmente por uma simples inspeção visual do seu gráfico no tempo. Contudo, existem testes que nos auxiliam quanto a identificação de não-estacionariedade nas séries temporais.

II.3 – Teste de Estacionariedade Baseado no Correlograma

Um teste simples de estacionariedade é o chamado teste da Função de Autocorrelação (FAC).

A FAC no hiato de tempo k , denominado ρ_k , é definido como:

$$\rho_k = \gamma_k / \gamma_0, \text{ ou seja,}$$

$$\rho_k = \text{covariância no hiato } k / \text{variância}$$

Observe que ρ_k é um número sem escala e que assume valores no intervalo de -1 à $+1$.

O gráfico que mostra a distribuição da FAC pelo hiato de tempo k é chamado de correlograma populacional. É através da análise dos padrões desse gráfico que fazemos a identificação quanto a estacionariedade.

Como na prática trabalhamos somente com as realizações de um processo estocástico, nos só conseguimos calcular a função de correlação amostral (FACA) ξ_k .

Função de Correlação Amostral

$$\xi_k = S_k / S_0$$

$$S_k = \{ \Sigma (Y_t - y)(Y_{t+k} - y) \} / n$$

$$S_0 = \Sigma (Y_t - y)^2 / n$$

onde: ξ_k – função de correlação amostral

y – média amostral

n – tamanho da série

Para as séries do preço de fechamento e do retorno da ação vale-PN o correlograma estimado é mostrado, respectivamente, na tabela 2.3.1 e na tabela 2.3.2. Estas tabelas foram calculadas utilizando-se o “software” – “*Econometrics Views*” - versão.2.0.

A análise do correlograma nos ajuda a identificar se a série temporal é estacionária ou não.

O correlograma do preço de fechamento da ação na tabela 2.3.1 apresenta um padrão típico de um série não-estacionária: a FAC estimada começa em um valor muito alto (0.965 no hiato 1) e cai suave e geometricamente (o FAC no hiato 36 é 0.174); Esse tipo de padrão observado é geralmente um indicador de que a série temporal é não-estacionária.

Esta análise confirma a análise gráfica (*vide* figura 2.2.1) da série temporal do preço de fechamento da ação Vale-PN.

Em contra partida observe o padrão do correlograma do retorno da ação apresentada na tabela 2.3.2: esta decai rapidamente e os valores são baixos.

Pode-se testar a significância estatística da FAC utilizando-se a estatística “Q” desenvolvido por Box e Ljung. Essa estatística segue aproximadamente, para amostras

grandes, a distribuição Quiquadrado (*chi-square*) com m graus de liberdade, onde m é o hiato de tempo utilizado para calcular “Q”.

Formalmente:

$$Q_{\text{obs}} \sim \chi^2 (m)$$

Assim se o “ Q_{obs} ” exceder o $\chi^2 (m)$ nós rejeitamos a hipótese nula de que todos os $\xi_k = 0$; ou seja, pelo menos algum ξ_k deve ser não-nulo.

Correlogram of VALE_PN

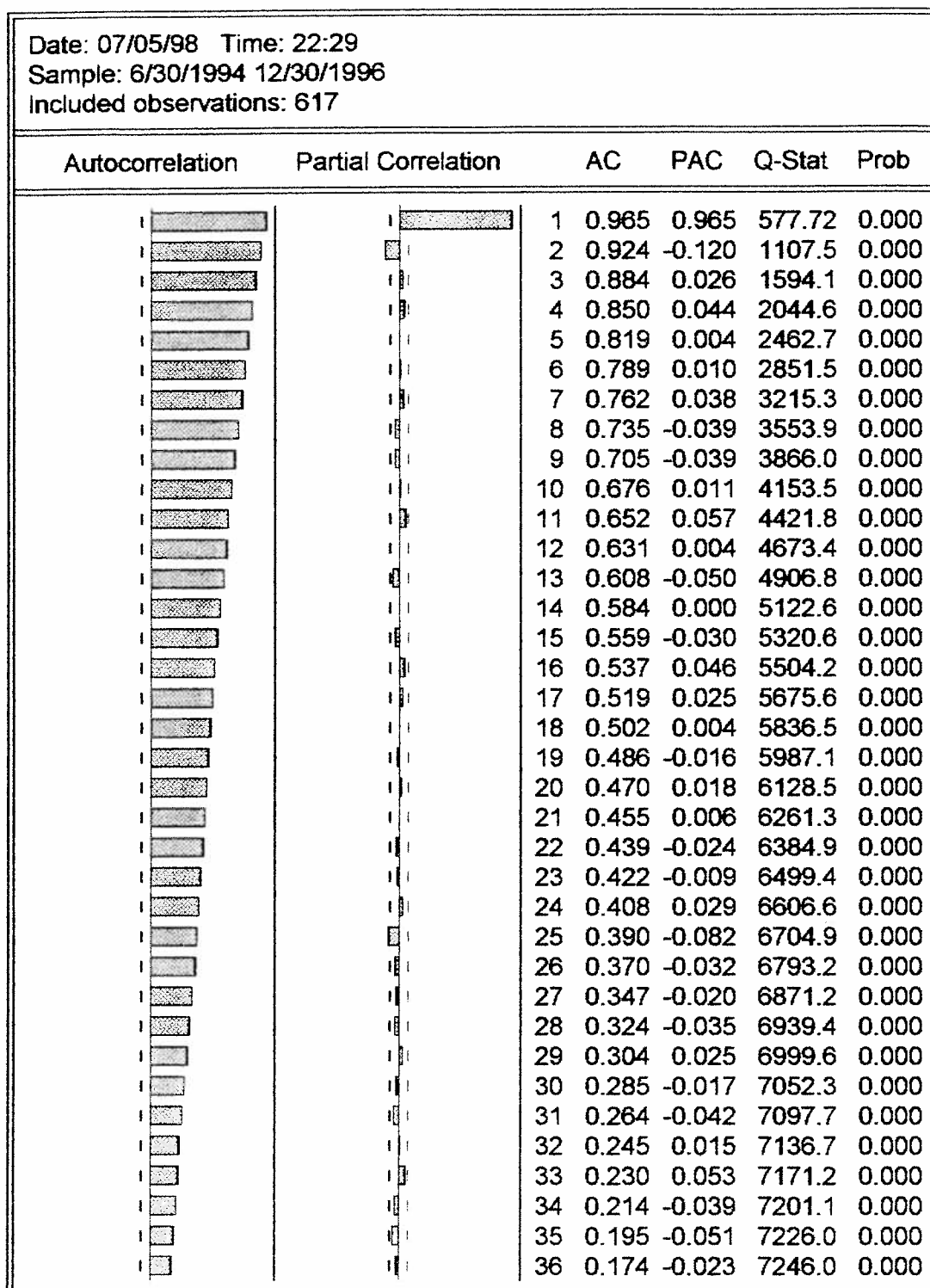


Tabela 2.3.1 – Correlograma do preço de fechamento da Vale-PN.

Correlogram of RETVALE

Date: 07/05/98 Time: 22:30 Sample: 6/30/1994 12/30/1996 Included observations: 615						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.150	0.150	13.954	0.000
		2	-0.124	-0.150	23.508	0.000
		3	-0.112	-0.071	31.243	0.000
		4	0.035	0.049	31.993	0.000
		5	0.009	-0.030	32.046	0.000
		6	-0.102	-0.102	38.486	0.000
		7	0.007	0.049	38.518	0.000
		8	0.084	0.051	42.969	0.000
		9	0.044	0.007	44.178	0.000
		10	-0.099	-0.083	50.316	0.000
		11	-0.056	-0.009	52.282	0.000
		12	0.018	-0.002	52.484	0.000
		13	0.032	0.006	53.115	0.000
		14	-0.015	-0.007	53.252	0.000
		15	-0.068	-0.057	56.152	0.000
		16	-0.056	-0.064	58.150	0.000
		17	0.021	0.019	58.423	0.000
		18	-0.001	-0.019	58.423	0.000
		19	-0.046	-0.040	59.793	0.000
		20	-0.028	-0.021	60.302	0.000
		21	0.002	-0.022	60.303	0.000
		22	0.025	0.007	60.716	0.000
		23	-0.040	-0.037	61.718	0.000
		24	0.045	0.072	63.016	0.000
		25	0.076	0.040	66.779	0.000
		26	0.074	0.046	70.354	0.000
		27	-0.022	-0.011	70.670	0.000
		28	-0.057	-0.021	72.741	0.000
		29	0.004	0.009	72.752	0.000
		30	0.042	0.029	73.883	0.000
		31	-0.014	-0.030	74.006	0.000
		32	-0.076	-0.060	77.801	0.000
		33	0.072	0.082	81.147	0.000
		34	0.066	0.010	83.973	0.000
		35	0.019	0.019	84.213	0.000
		36	-0.082	-0.045	88.647	0.000

Tabela 2.3.2 – Correlograma do retorno da Vale-PN.

II.4 – Transformação

A partir de transformações adequadas a média (média incondicional) e a variância (variância incondicional) de uma série temporal não-estacionária, pode ser estabilizadas temporalmente, ou seja, a série não-estacionária é transformada em uma série estacionária.

Estacionariedade é uma propriedade estatística desejável para séries temporais, pois grande parte dos modelos disponíveis para séries temporais são estacionários.

A média (média incondicional) pode ser estabilizados através da diferença ($\Delta P_t = P_t - P_{t-1}$ - esta é a primeira diferença mas há casos que para se transformar um série temporal em estacionária é necessário fazer mais de uma diferença).

Nas séries temporais financeiras, é comum a utilização da diferença do logaritmo neperiano do preço, i.e.:

$$\Delta \log(P_t) = \log(P_t) - \log (P_{t-1})$$

Se $\Delta P_t \ll P_{t-1}$, pode-se mostrar que esta transformação representa aproximadamente a variação relativa da série ($\Delta \log(P_t) \cong \Delta P_t / P_{t-1}$, sendo $\Delta P_t = P_t - P_{t-1}$).

Note que a variação relativa nada mais é do que o retorno da série financeira. Portanto quando calculamos a volatilidade da série financeira transformada, utilizando a diferença logarítmica, estamos calculando a volatilidade da série de retorno. Ou seja, o calculo de risco mais importante para o investidor.

Esta transformação foi efetuada no nosso trabalho para obtermos os retornos das séries financeiras-exemplo (índice da Ibovespa e Vale-PN).

Como pode ser visto no gráfico 2.2.1 e 2.2.2 (pg. 15)vemos que esta transformação estabilizou a série Vale-PN.

O índice Ibovespa, não-estacionário, como pode ser observado na figura 2.4.1

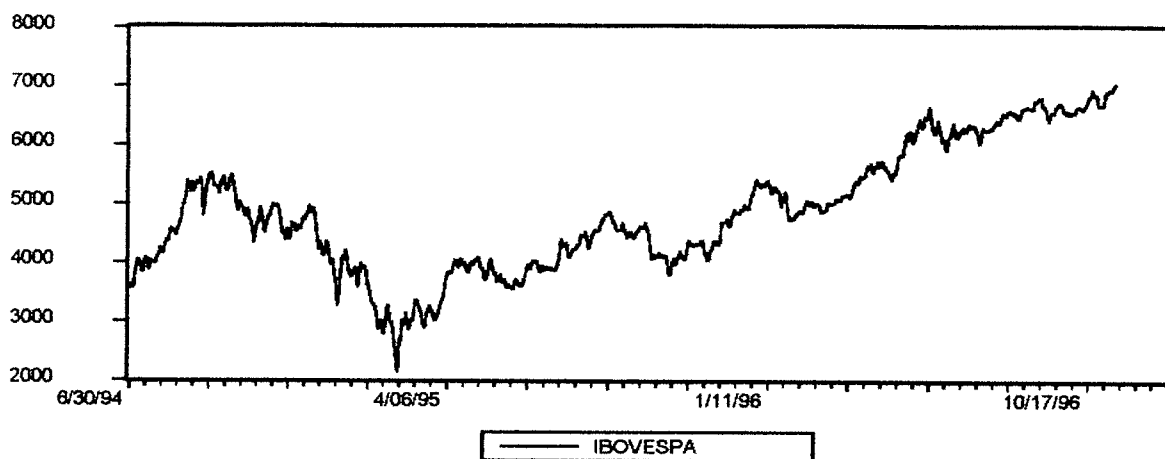


Figura 2.4.1 – índice da Ibovespa, série não estacionária.

Fazendo a transformação utilizando-se o método da diferença logarítmica a série se torna estacionária como se pode observar pela figura 2.4.2.

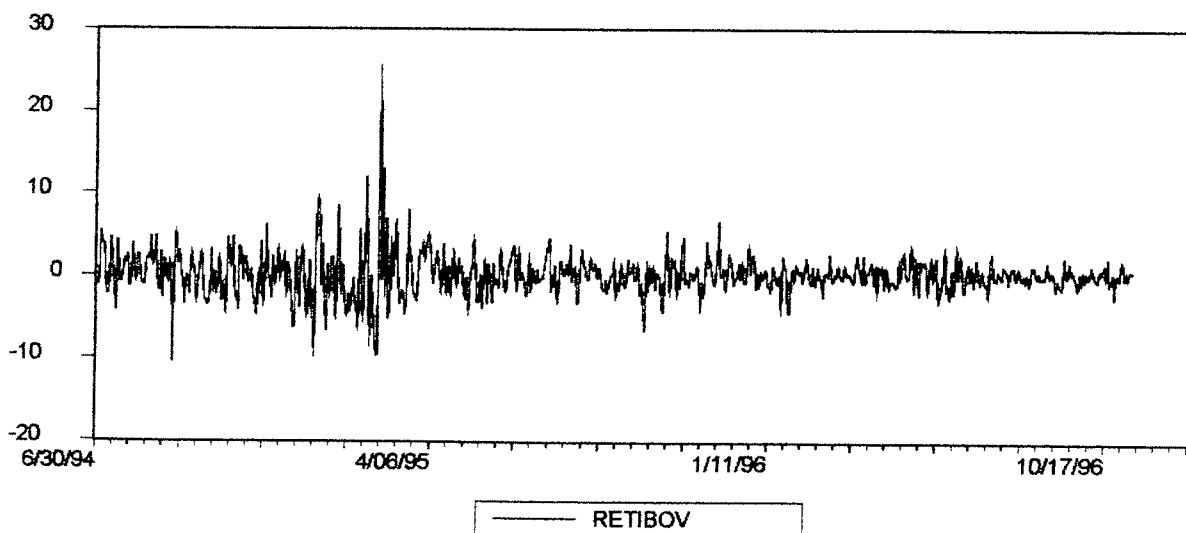


Figura 2.4.2 – Retorno do índice Ibovesta, série temporal estacionária.

II.5 – Fatos Estilizados das Séries Temporais Financeiras

Estudos empíricos, Mandelbrot(1963) – Fama(1965) – Fama(1970) – Taylor(1986), mostraram que as séries financeiras possuem algumas características peculiares em comum. A essas características observadas deu-se o nome de *fatos estilizados*.

Os fatos estilizados das séries temporais são um conjunto características estatísticas que estas séries apresentam em comum, independente de como elas foram geradas, em mercado elas foram geradas. Essas características são observadas tanto na séries de “*commodities*” brasileiras (café, açúcar, cacau etc.) com no índice da bolsa de valores da Rússia, ou no taxa de juros do banco central Alemão.

O estudo, entendimento e análise das características empíricas das séries financeira é de suma importância, pois os modelos que tentam reproduzir o comportamento das séries temporais devem ser construídos levando-se em conta tais características.

Analisaremos aqui algumas das características estatísticas empíricas que os retornos de séries temporais financeiras apresentam.

Para um estudo mais formal e amplo dos fatos estilizados pode ser encontrada em Taylor (1986), Pagan(1994), Shepard(1994b).

1. Conglomerados de Volatilidade

Conglomerados de volatilidade é a alternância entre períodos de alta volatilidade e períodos com baixa volatilidade.

Definição de Mandelbrot(1963, pg.418):

“...large changes tend to be followed by large changes – of either sign – and small changes tend to be followed by small changes...” – este conceito passou a ser chamado de Conglomerados de Volatilidade (*Volatility clustering*).

As figuras 2.5.1 e o 2.5.2 mostram claramente a presença de conglomerados de volatilidade nas séries do quadrado do retorno do índice Ibovespa e quadrado do retorno da Vale-PN.

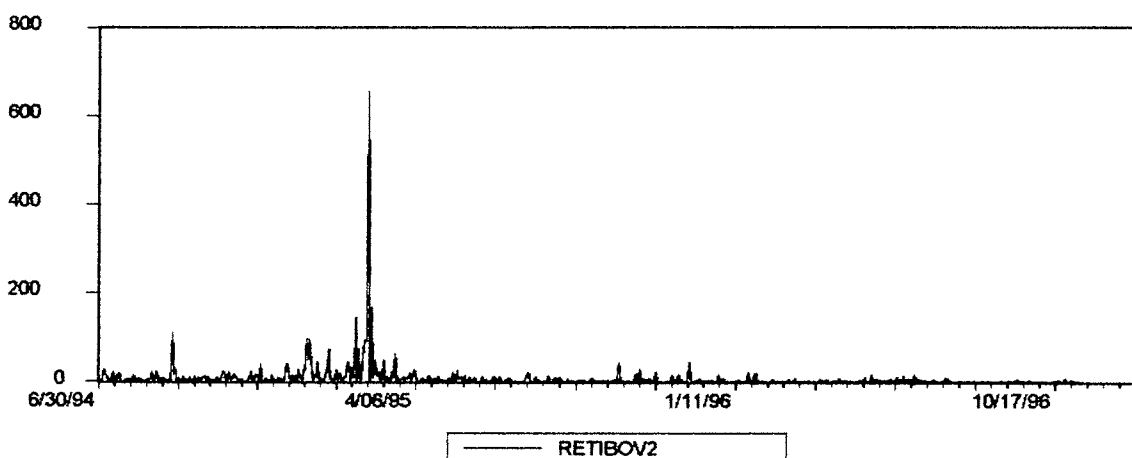


Figura 2.5.1 – Série do retorno ao quadrado do índice Ibovesta

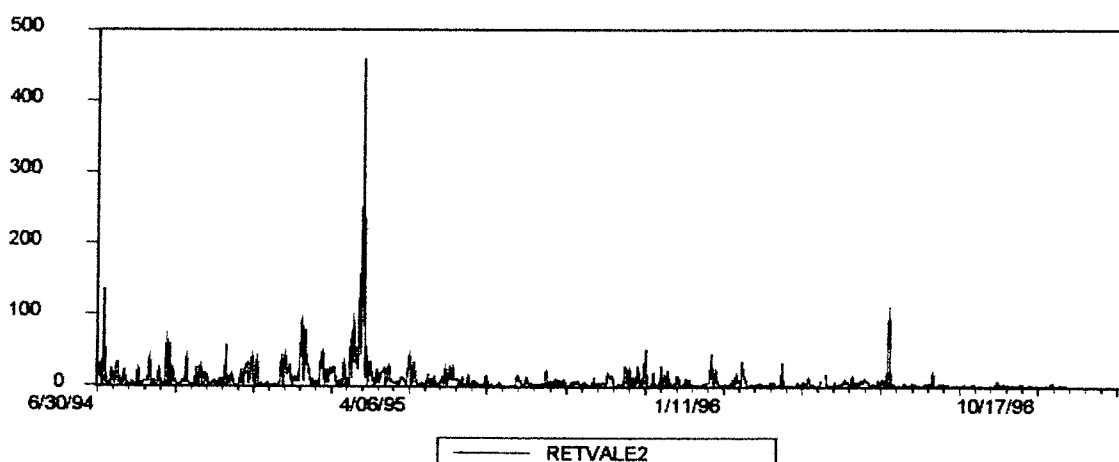


Figura 2.5.2 – Série do retorno ao quadrado da Vale-PN

2. Simetria

Uma variável tem distribuição simétrica em torno de μ , se e somente se, $\Pr(\mu - Y) = \Pr(\mu + Y)$ para todo Y . Geralmente toma-se μ como a média da variável.

Pode-se utilizar o histograma para avaliar a simetria de uma distribuição. Mas a maneira mais usual é utilizar o coeficiente de simetria (*Skewness*), definido como:

$$S = E(Y - \mu)^3 / \sigma^3$$

Demonstra-se que se a distribuição é simétrica então $E(Y - \mu)^3 = 0$, ou seja, $S = 0$

Na tabela 2.5.1 e na 2.5.2 pode-se observar tanto a o histograma quanto o coeficiente de simetria (*Skewness*) para o retorno dos séries exemplo.

Analisando as tabelas 2.5.1 e 2.5.2 (pg.28) pode-se chegar a conclusão de que o distribuição dos retornos de nossas séries exemplo não são simétricas! A literatura especializada admite uma pequena assimetria para séries de retorno. É importante observar, entretanto, que a existência de observações extremas (*outliers*, observações aberrantes, quebra de ordem, etc.) pode estar influenciando nesse resultado.

A análise histograma é feita através da comparação do resultado obtido com a densidade normal. Mas através do histograma não conseguimos observar se há presença de observações extremas.

Herencia(1997, pg.18) sugere a utilização “ ...de um procedimento gráfico robusto para testar a simetria da distribuição...”.

Em seus estudos empíricos, Herencia(1997), também acha um histograma e um coeficiente de simetria que *a priori* indicam um distribuição não simétrica.

Como o procedimento sugerido pelo autor ultrapassa a metodologia e o propósito desse trabalho não faremos a construção do gráfico robusto. Entendemos que a presença de observações extrema esteja comprometendo os resultados e, dessa forma, consideramos que a distribuição dos retornos é aproximadamente simétrica.

Para analisarmos a influência dessas observações aberrantes sobre o teste do coeficiente de simetria iremos excluir essas observações da nossa amostra. O critério de corte será definido como:

$$\text{Se } |Y_t| > \mu + 4\sigma$$

Com esse critério de exclusão obtivemos o resultado:

Série Exemplo	Amostra Original	Amostra sem Observações Aberrantes
Ibovespa	S = 1.212180	S = -0.295645
Vale-PN	S = 0.688085	S = 0.780716

Percebe-se na série Ibovespa que a retirada das observações aberrantes (3 obs. Que foram excluídas) o coeficiente de simetria sofreu uma alteração bastante significativa esse resultado nos leva a acreditar que observações aberrantes estava contaminando o coeficiente de simetria e que o retorno do índice Ibovespa possui uma distribuição aproximadamente simétrica.

Na série Vale-PN o resultado foi surpreendente a retirada de uma observação aberrante fez com que o coeficiente de simetria aumentasse, mas mesmo o novo coeficiente não é muito alto, o que nos permite dizer que a distribuição do retorno da Vale-PN é simétrica.

3. Cauda Pesada ou Excesso de Curtose

Outro fato estilizado de uma série de retorno é a cauda pesada. A largura da cauda de uma distribuição é medida pelo coeficiente de curtose:

$$K = E(Y - \mu)^4 / \sigma^4$$

O excesso de curtose pode ser medido com a diferença entre o coeficiente de curtose (*Kurtosis*) k da série e a curtose normal, que é igual a 3.

Na tabela 2.5.1 e na 2.5.2 (pg.28) podemos observar que o coeficiente de curtose (*Kurtosis*) é maior do que 3 para os dois retornos. Esse resultado está de acordo com o esperado, pois um dos fatos estilizados d distribuição dos retornos é o excesso de curtose.

- Modelos Tradicionais

Não se deve utilizar os modelos tradicionais na modelagem de séries temporais financeiras, pois estes não conseguiram reproduzir os fatos estilizados e com isso geraram estimadores da volatilidade não razoáveis.

Segundo Herencia(1997, pg.17):

“ Modelos tradicionais de séries temporais (lineares) são incapazes de gerar Conglomerados de Volatilidade ”

É necessário a utilização de modelos específicos que conseguem reproduzir os fatos estilizados. Tais modelos são caracterizados por serem modelos não-lineares e não-Gaussianos.

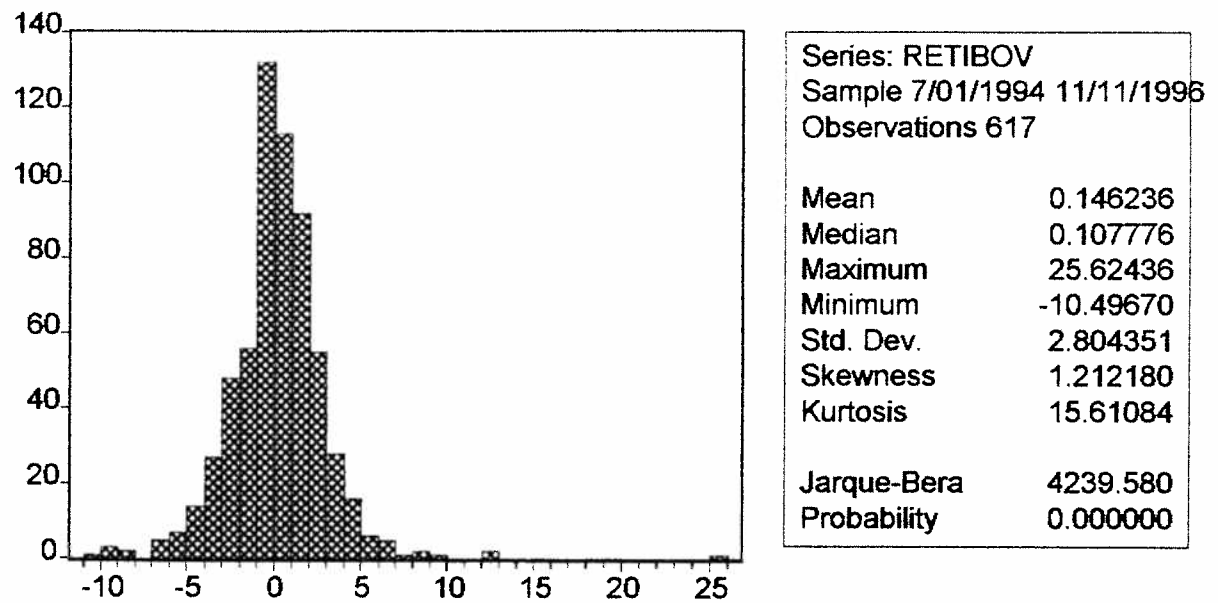


Tabela 2.5.1 – Histograma e Estatísticas do retorno índice Ibovespa

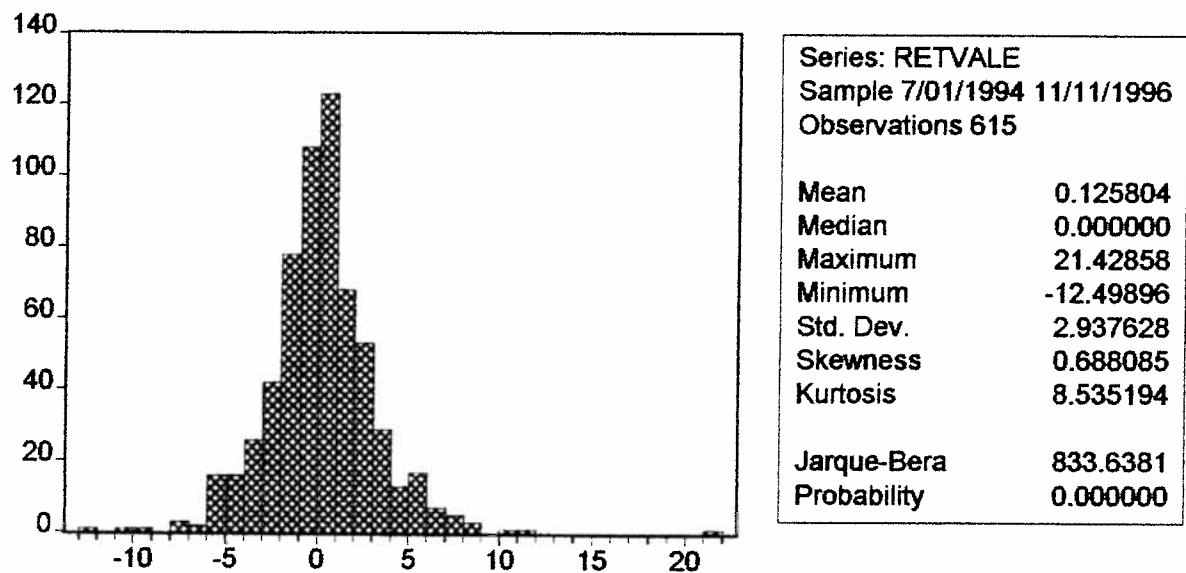


Tabela 2.5.2 – Histograma e Estatísticas do retorno da Vale-PN

CAPÍTULO III: MODELOS ARCH

III.1 – Modelos de Volatilidade

Definição de Herencia(1997, pg.2): “ *Os modelos que se ocupam da medição da volatilidade são conhecidos como Modelos de Volatilidade, sendo os dois modelos mais utilizados para estima-los: os modelos Autoregressivos de Variância Condicional Heteroscedástica (ARCH) e suas extensões e os Modelos de Variância Estocástica. Dentro dos modelos do tipo ARCH, o mais utilizado nas aplicações empíricas é o GARCH (1,1) e , dentro dos Modelos de Variância Estocástica o AR(1)-SV. ”.*

Um bom modelo de volatilidade deve ser capaz de reproduzir os fatos estilizados das séries temporais financeiras e fornecer bons estimadores.

Nesse trabalhos analisaremos os modelos ARCH e algumas de suas extensões. Para uma leitura que abranja os Modelos de Variância Estocástica *vide* Herencia(1997).

III.2 – Modelo ARCH (q) – Engle(1982)

Modelo proposto por Engle(1982), cuja aplicação original envolvia a modelagem da taxa de inflação do Reino Unido.

Engle, como esse modelo, provou ser possível modelar simultaneamente a média e a variância de um processo.

Nos modelos ARCH a variância condicional e a variância incondicional são distintas. A variância incondicional é constante enquanto a variância condicional ou volatilidade, muda com o tempo.

Seja Y_t o processo estacionário de um retorno que possui a forma de um ARMA, i.e.:

$$Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Queremos estimar Y_{t+1} .

1) Estimador Condicional de Y_{t+1}

$$E_t (Y_{t+1} / Y_t) = a_0 + a_1 Y_t$$

Se usarmos o estimador condicional de Y_{t+1} para estimarmos a variância do erro, teremos:

$$E_t [(Y_{t+1} - a_0 - a_1 Y_t)^2] = E_t (\varepsilon_{t+1}^2) = \sigma^2$$

$$\text{Var} (\varepsilon_t / Y_t) = \sigma^2$$

2) Estimador Incondicional de Y_{t+1}

$$E (Y_{t+1}) = [a_0 / (1 - a_1)]$$

O estimador incondicional é sempre a média (de longo prazo) da série Y_t .

Estimar a variância do erro utilizando o estimador incondicional:

$$E \{ [Y_{t+1} - a_0 / (1 - a_1)]^2 \} = E \{ \varepsilon_{t+1} + a_1 \varepsilon_t + a_1^2 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots \} = \sigma^2 / (1 - a_1^2)$$

$$\text{Var} (\varepsilon_t) = \sigma^2 / (1 - a_1^2)$$

Como $\{ 1 / (1 - a_1^2) \} > 1$ (lembre-se que $0 < a_1 < 1$) a estimação incondicional tem uma variação maior do que a estimação condicional, por isso dizemos que o estimador condicional.

Observe que os investidores estão preocupados somente com a estimação condicional do retorno futuro e sua variância condicional. Na explicação de Enders(1994) “ *As an asset holder you would be interested in forecasts of the rate of return and its variance over the holding period. The unconditional variance (i. e., the long-run forecast of the variance) would be unimportant if you plan to buy at t and sell at t+1* ”.

Suponha, agora, que a variância condicional não seja constante.

Poderíamos modelar a variância condicional heteroscedastica como sendo um processo gerado por uma AR(q) usando o quadrado dos resíduos estimados, ou seja, modelar o erro como sendo um modelo Autoregressivo de Variância Condicional Heteroscedastica (dai vem o nome ARCH).

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2$$

$$Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Pode-se demonstrar que a variância condicional de Y_t no momento $t + 1$ (um passo a frente).

$$\text{Var}(Y_{t+1}) = E_t(\varepsilon_{t+1}^2) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_t^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t+1-q}^2$$

O modelo ARCH é capaz de reproduzir satisfatoriamente os fatos estilizados, para a demonstração de quais fatos o modelo reproduz e a prova *vide* Herencia (1997 , pg.47-50).

Segundo Herencia (1997 , pg.47) “ *Nesse modelo percebemos que grandes desvios (com respeito à média igual a zero) ou um grande valor do quadrado do retorno produz um aumento da variância condicional no instante posterior. Modelar a variância condicional como dependente dos quadrados das observações tem um apelo natural e constitui uma forma elegante e simples de gerar conglomerados de volatilidade.* ”

Mas a estimação e a previsão utilizando o modelo ARCH é um tanto problemática devido a necessidade de definirmos parâmetros e a presença de muitas restrições nos parâmetros.

Herencia(1997, pg.50) aponta ainda outras dificuldades “ *...mesmo no caso mais simples do modelo ARCH(1), é muito difícil encontrar expressões para a distribuição conjunta dos retornos. Essa é uma desvantagem desses modelos e constitui uma das características mais importantes com graves conseqüências na predição e inferência.* ”

Desse modo não faremos a estimação da volatilidade do retorno utilizando o modelo ARCH (q).

A demonstração formal desse modelo se fez necessária, pois os outros modelos são extensões dele, então para a correta compreensão dos modelos de volatilidade aqui propostos era mister o entendimento do modelo ARCH – Engle (1982).

III.3 – Modelo GARCH (p,q) – Bollerslev (1986)

Extensão do modelo original de Engle, foi efetuado por Bollerslev, o qual propôs um modelo onde a variância condicional é gerado por um modelo ARMA(p,q).

Herencia(1997, pg.54) “ *Neste modelo, a variância condicional é função tanto dos quadrados das observações “(AR(q))” quanto das variâncias condicionais passadas*

“(MA (p,q))”. Nesse sentido, é um modelo adaptativo mais sofisticado que o ARCH(q). ”

O modelo GARCH (p,q):

Considere o erro sendo gerado por este processo GARCH (p,q):

$$Y_t = \varepsilon_t (h_t)^{1/2}$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}$$

O modelo GARCH (Generalized ARCH) atende as características esperadas de um modelo de volatilidade. Sendo o GARCH (1,1) considerado um “ *bench-mark* ”.

Faremos estimação utilizando o modelo GARCH no Capítulo III.

III.4 – Modelo EGARCH – Nelson (1991)

Modelo proposto por Nelson (1991) para tentar sanar algumas de eficiência dos modelos GARCH.

Erro sendo gerado por este processo:

$$\text{Log} (h_t^2) = \omega + \beta \text{log} (h_{t-1}^2) + \alpha | \varepsilon_{t-1} / h_{t-1} | + \gamma (\varepsilon_{t-1} / h_{t-1})$$

III.5 – Estimadores

Não se deve calcular o estimador usando o método do mínimo quadrado ordinário “ *Ordinary Least Square – OLS* ” quando o modelo econométrico apresentar uma AR – “ *autoregressive* ”, pois, em geral, resultará em estimadores com propriedades estatísticas muito pobres.

Deve-se utilizar o método da máxima verossimilhança. A essência desse método é escrever a função de densidade conjunta das observações e então trata-las como sendo uma função dos parâmetros desconhecidos. Interpretado dessa maneira eles são chamados de função semelhança que indica se os valores dos parâmetros são plausíveis, dado a distribuição observada da amostra. O valores mais plausíveis são aqueles que maximizam a função de semelhança.

CAPÍTULO IV: ESTUDO EMPÍRICO

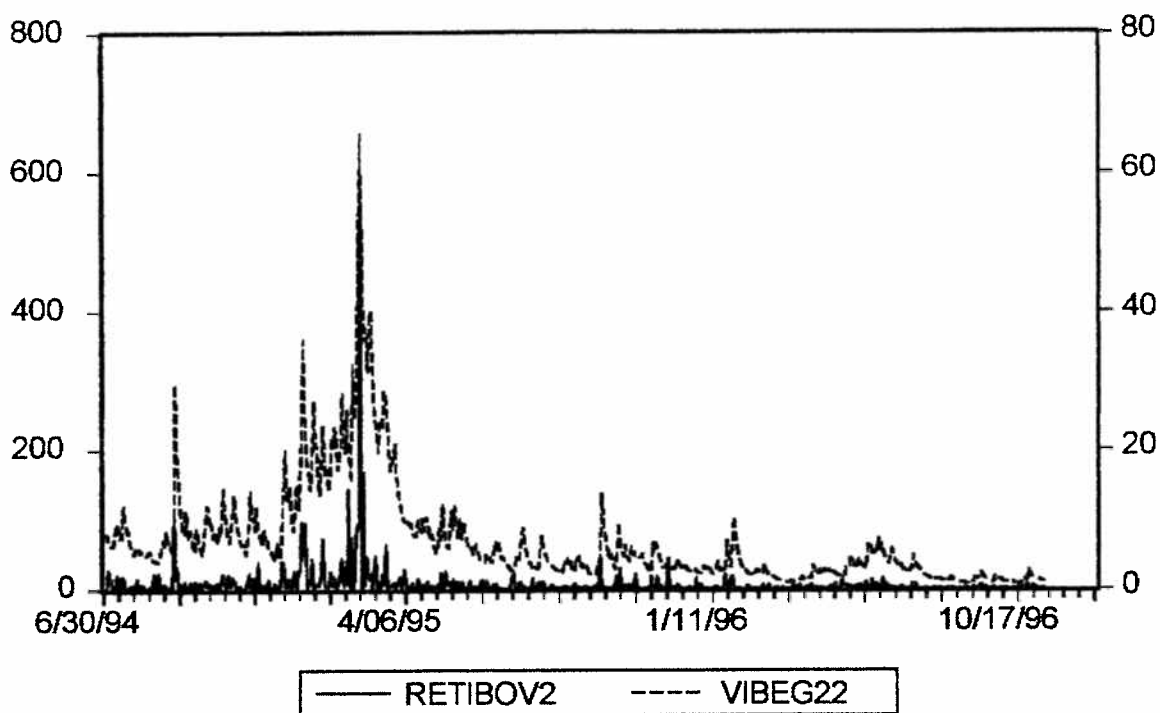
Nesse capítulo estimaremos a variância condicional do retorno das séries exemplo utilizando para isso os modelos estudados.

Utilizaremos o “*pacote estatístico*” *EViews 2.0*

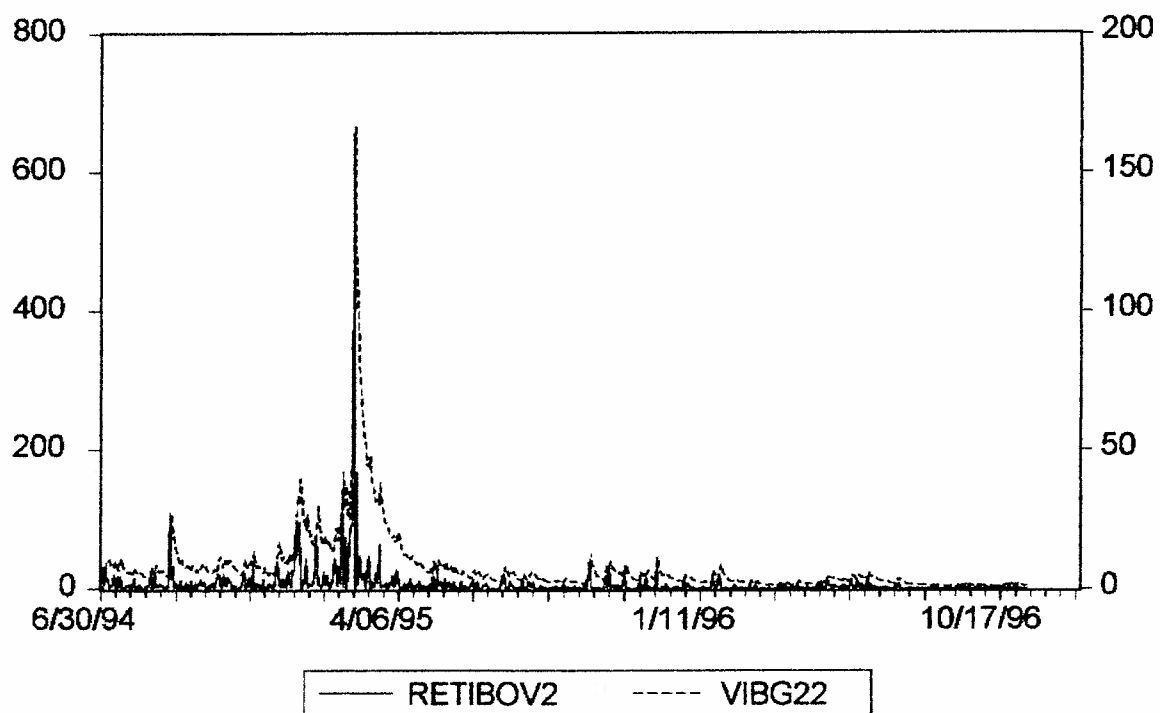
As séries exemplos são: o índice Ibovespa e o preço de fechamento da Vale-PN.

A estimações da volatilidade se encontra a seguir

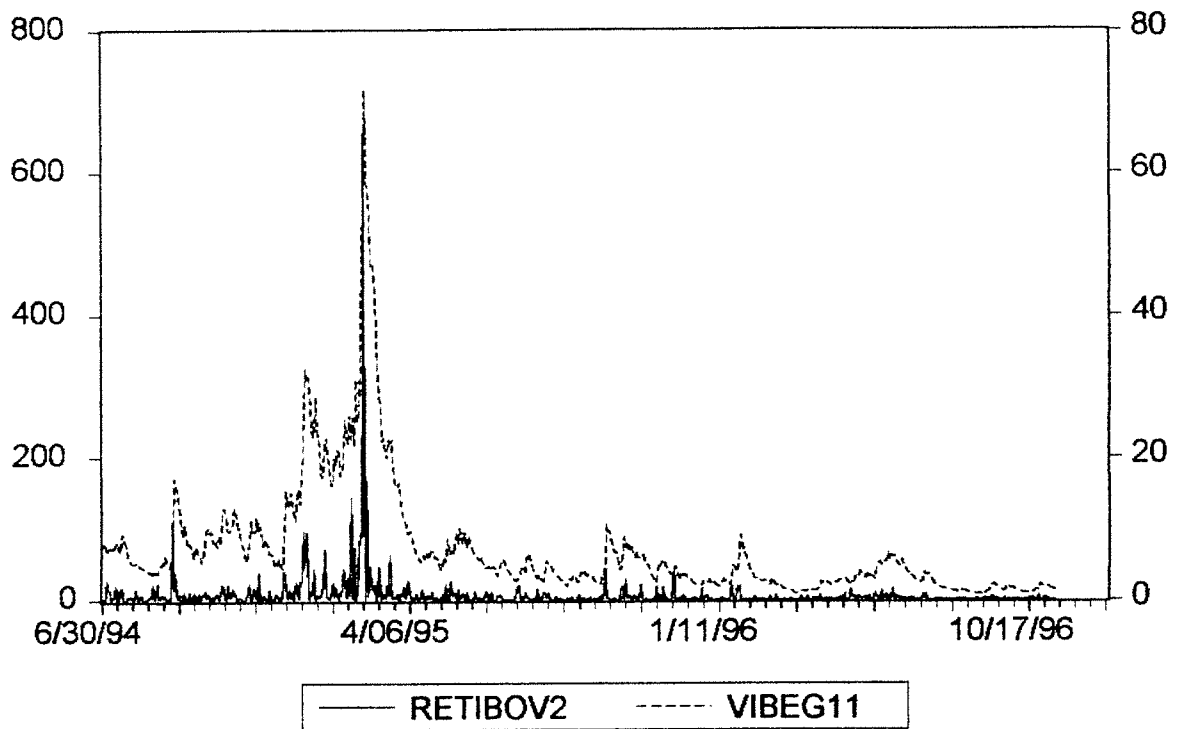
Por último estão o “*Estimation Output*”



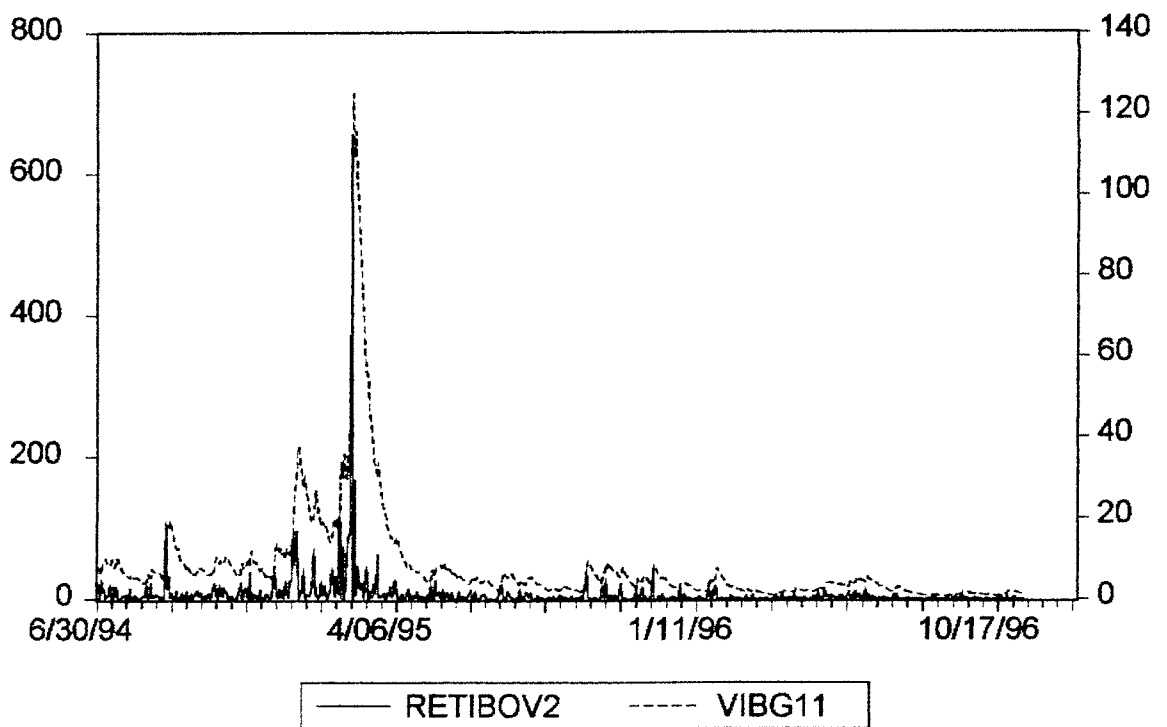
EGARCH (2,2)



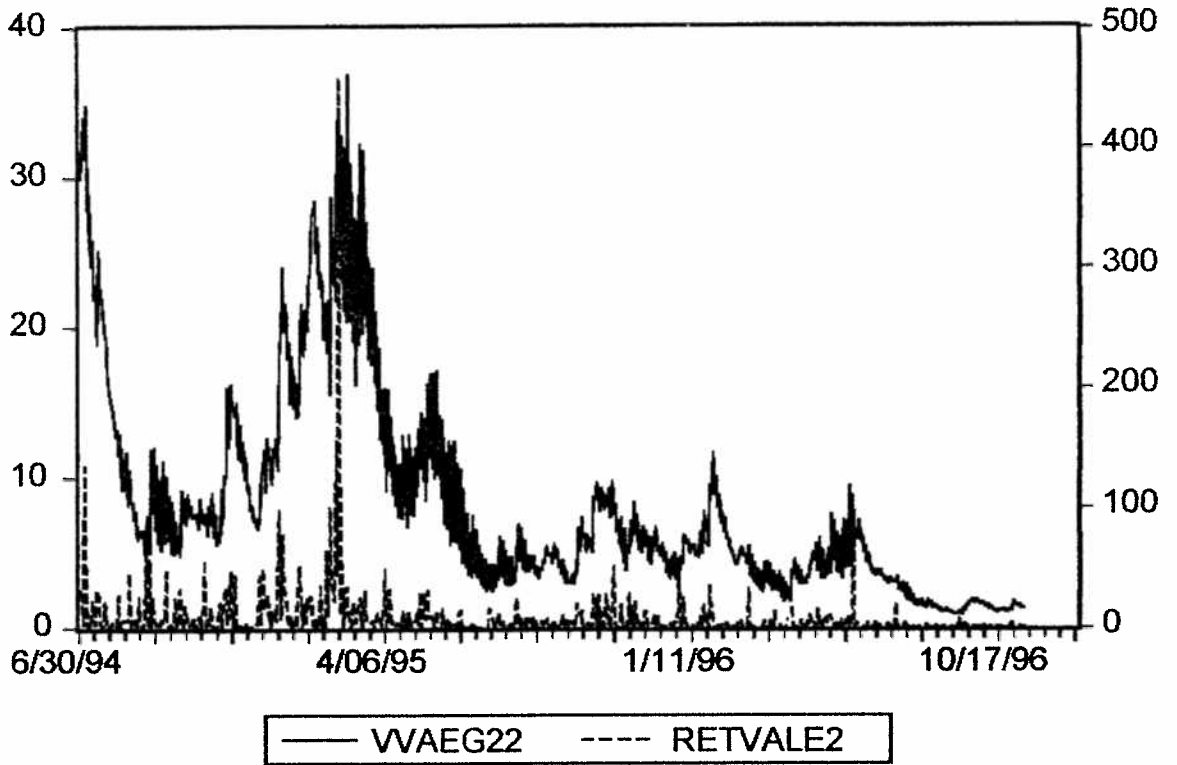
GARCH(2,2)



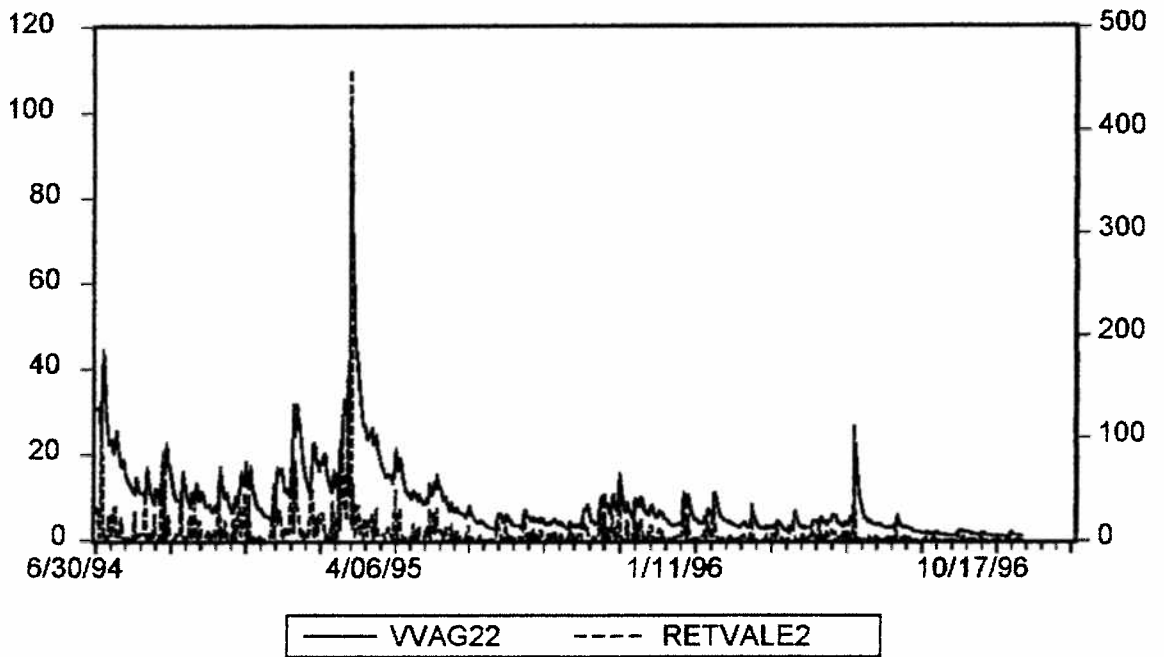
EGARCH(1,1)



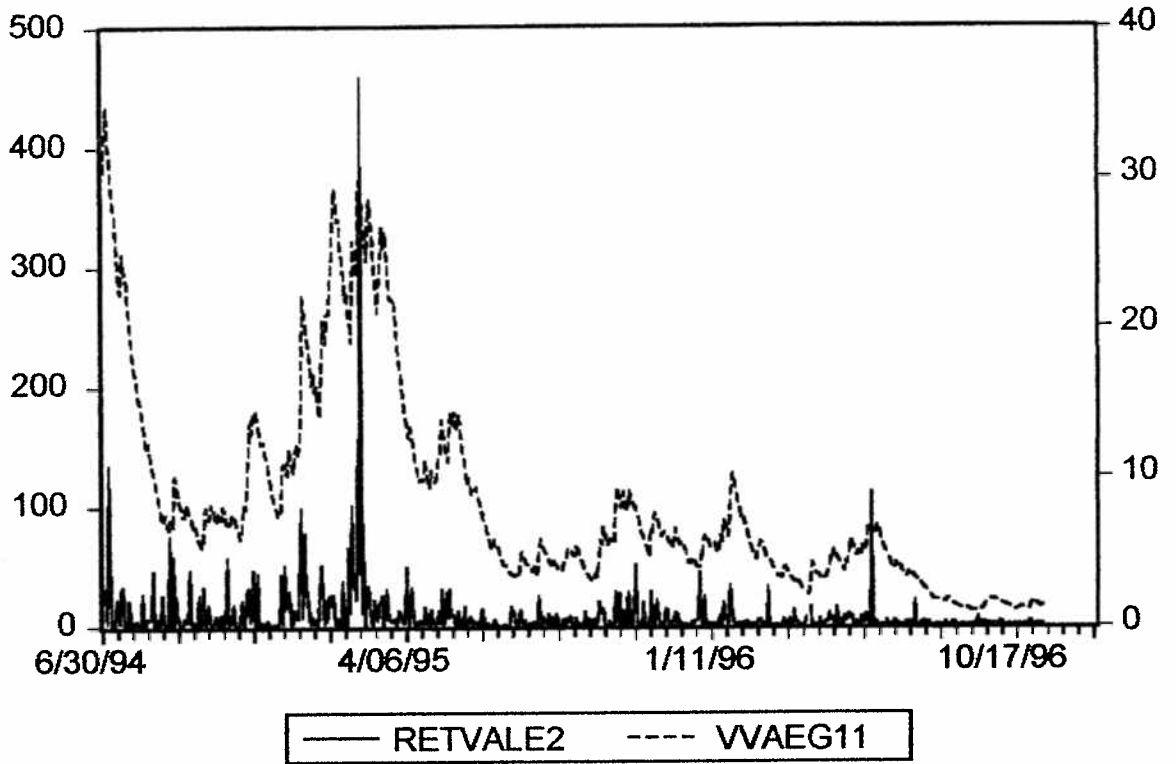
GRACH(1,1)



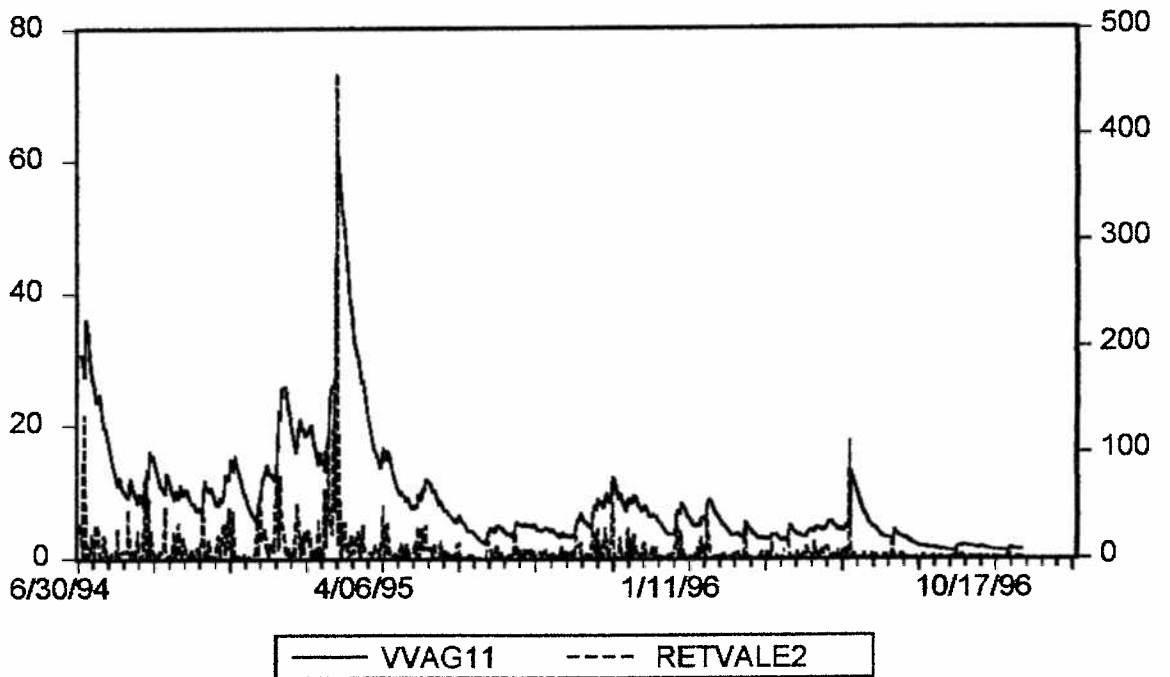
EGARCH(2,2)



GARCH(2,2)



EGARCH(1,1)



GARCH(1,1)

ARCH // Dependent Variable is RETIBOV				
Date: 07/05/98 Time: 15:13				
Sample(adjusted): 7/01/1994 11/11/1996				
Included observations: 617 after adjusting endpoints				
Convergence achieved after 50 iterations				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.147456	0.071982	2.048503	0.0409
Variance Equation				
C	-0.029558	0.019992	-1.478467	0.1398
[RES]/SQR[GARCH](1)	0.238572	0.062985	3.787778	0.0002
RES/SQR[GARCH](1)	-0.170517	0.045130	-3.778340	0.0002
[RES]/SQR[GARCH](2)	-0.196654	0.062826	-3.130117	0.0018
RES/SQR[GARCH](2)	0.163089	0.041921	3.890414	0.0001
EGARCH(1)	1.723279	0.150289	11.46646	0.0000
EGARCH(2)	-0.726086	0.148674	-4.883745	0.0000
R-squared	0.000000	Mean dependent var	0.146236	
Adjusted R-squared	-0.011494	S.D. dependent var	2.804351	
S.E. of regression	2.820422	Akaike info criterion	2.086655	
Sum squared resid	4844.463	Schwarz criterion	2.144027	
Log likelihood	-1345.184	Durbin-Watson stat	1.851605	

ARCH // Dependent Variable is RETIBOV				
Date: 07/05/98 Time: 15:06				
Sample(adjusted): 7/01/1994 11/11/1996				
Included observations: 617 after adjusting endpoints				
Convergence achieved after 36 iterations				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.183458	0.073132	2.508581	0.0124
Variance Equation				
C	0.014546	0.016371	0.888483	0.3746
ARCH(1)	0.199878	0.050721	3.940767	0.0001
ARCH(2)	-0.160889	0.047030	-3.420987	0.0007
GARCH(1)	1.393977	0.290502	4.798515	0.0000
GARCH(2)	-0.434593	0.261446	-1.662270	0.0970
R-squared	-0.000176	Mean dependent var	0.146236	
Adjusted R-squared	-0.008361	S.D. dependent var	2.804351	
S.E. of regression	2.816051	Akaike info criterion	2.080348	
Sum squared resid	4845.317	Schwarz criterion	2.123377	
Log likelihood	-1357.329	Durbin-Watson stat	1.851279	

ARCH // Dependent Variable is RETIBOV				
Date: 07/05/98 Time: 15:12				
Sample(adjusted): 7/01/1994 11/11/1996				
Included observations: 617 after adjusting endpoints				
Convergence achieved after 39 iterations				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.135660	0.070976	1.911355	0.0564
Variance Equation				
C	-0.139387	0.027734	-5.025865	0.0000
RES /SQR[GARCH](1)	0.215682	0.040840	5.281149	0.0000
RES/SQR[GARCH](1)	-0.082532	0.021085	-3.914231	0.0001
EGARCH(1)	0.978733	0.009630	101.6331	0.0000
R-squared	-0.000014	Mean dependent var	0.146236	
Adjusted R-squared	-0.006550	S.D. dependent var	2.804351	
S.E. of regression	2.813521	Akaike info criterion	2.076944	
Sum squared resid	4844.531	Schwarz criterion	2.112802	
Log likelihood	-1350.060	Durbin-Watson stat	1.851579	

ARCH // Dependent Variable is RETIBOV				
Date: 07/05/98 Time: 15:03				
Sample(adjusted): 7/01/1994 11/11/1996				
Included observations: 617 after adjusting endpoints				
Convergence achieved after 19 iterations				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.181455	0.072042	2.518739	0.0120
Variance Equation				
C	0.047993	0.028126	1.706376	0.0884
ARCH(1)	0.125629	0.021589	5.819025	0.0000
GARCH(1)	0.872644	0.020219	43.15893	0.0000
R-squared	-0.000158	Mean dependent var	0.146236	
Adjusted R-squared	-0.005053	S.D. dependent var	2.804351	
S.E. of regression	2.811427	Akaike info criterion	2.073846	
Sum squared resid	4845.227	Schwarz criterion	2.102533	
Log likelihood	-1359.137	Durbin-Watson stat	1.851313	

ARCH // Dependent Variable is RETVALE				
Date: 07/05/98 Time: 16:28				
Sample(adjusted): 7/01/1994 11/11/1996				
Included observations: 617 after adjusting endpoints				
Convergence achieved after 60 iterations				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.047406	0.079420	-0.596900	0.5508
Variance Equation				
C	-0.154846	0.020788	-7.448854	0.0000
RES /SQR[GARCH](1)	0.149677	0.017910	8.357304	0.0000
RES/SQR[GARCH](1)	-0.041115	0.020674	-1.988703	0.0472
RES /SQR[GARCH](2)	0.070807	0.019807	3.574861	0.0004
RES/SQR[GARCH](2)	-0.101718	0.015180	-6.700709	0.0000
EGARCH(1)	0.000595	0.010263	0.057954	0.9538
EGARCH(2)	0.988320	0.009919	99.63773	0.0000
R-squared	-0.004288	Mean dependent var	0.141916	
Adjusted R-squared	-0.015832	S.D. dependent var	2.893493	
S.E. of regression	2.916308	Akaike info criterion	2.153518	
Sum squared resid	5179.454	Schwarz criterion	2.210890	
Log likelihood	-1426.808	Durbin-Watson stat	1.715494	

ARCH // Dependent Variable is RETVALE				
Date: 07/05/98 Time: 16:26				
Sample(adjusted): 7/01/1994 11/11/1996				
Included observations: 617 after adjusting endpoints				
Convergence achieved after 80 iterations				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.100997	0.080718	1.251226	0.2113
Variance Equation				
C	0.005589	0.008540	0.654472	0.5131
ARCH(1)	0.178091	0.053296	3.341528	0.0009
ARCH(2)	-0.159422	0.047179	-3.379085	0.0008
GARCH(1)	1.562009	0.206469	7.565336	0.0000
GARCH(2)	-0.581396	0.191435	-3.037049	0.0025
R-squared	-0.000200	Mean dependent var	0.141916	
Adjusted R-squared	-0.008385	S.D. dependent var	2.893493	
S.E. of regression	2.905599	Akaike info criterion	2.142956	
Sum squared resid	5158.372	Schwarz criterion	2.185986	
Log likelihood	-1440.554	Durbin-Watson stat	1.722505	

ARCH // Dependent Variable is RETVALE				
Date: 07/05/98 Time: 16:27				
Sample(adjusted): 7/01/1994 11/11/1996				
Included observations: 617 after adjusting endpoints				
Convergence achieved after 30 iterations				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
Variance Equation				
C	-0.072467	0.015076	-4.806826	0.0000
RES /SQR[GARCH](1)	0.096421	0.021575	4.469016	0.0000
RES/SQR[GARCH](1)	-0.070351	0.013095	-5.372430	0.0000
EGARCH(1)	0.997557	0.003107	321.0942	0.0000
R-squared	-0.002409	Mean dependent var	0.141916	
Adjusted R-squared	-0.007315	S.D. dependent var	2.893493	
S.E. of regression	2.904057	Akaike info criterion	2.138679	
Sum squared resid	5169.765	Schwarz criterion	2.167366	
Log likelihood	-1432.494	Durbin-Watson stat	1.718709	

BIBLIOGRAFIA:

- Davis E. Thomas. “organizador” (1990). *Financial Market Volatility and the Economy* Federal. Reserve Bank of Kansas City, Research Division.
- Enders, W. (1994). *Applied Econometrics Time Series*. Wiley.
- Gujarati, D. (1995). *Basic Econometrics*. McGraw-Hill.
- Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.
- Harvey, A. (1990). *The Econometrics Analysis of Time Series*. Phillip Alan.
- Harvey, A. (1994). *Time Series Models*. MIT press.
- Herencia, M. E. (1997). “*Volatilidade nos Modelos ARCH e Variância Estocástica: um estudo comparativo*”. TESE – IMECC – UNICAMP.
- Mandelbrot, B. B. (1963). “*The variation of certain speculative prices*”. Journal of Business. 36: 394-416.
- Mills, T. C. (1990). “*Time Series Techniques for Economists*”. Cambridge University Press.
- Pagan, A. (1994). “*The econometrics of financial markets*”. Mimeo, University of Rochester.
- Shepard, N. (1994b). “*Statistical aspects of ARCH and stochastic volatility*”. Mimeo, Nuffiel College.
- Taylor, S. J. (1986) “*Modelling Financial Times Series*”. Chitester: John Wiley
- Veiga, A.; Fernandes, C.; Baidya, T.(1993). *Volatilidade do Retorno de Séries Financeiras do Mercado Brasileiro*. Texto para Discussão, DEE, PUC-Rio